Vorwort und Einleitung.

Die vorliegende Schrift gibt den Hauptinhalt einer von mir im Wintersemester 1911/12 an der Universität Göttingen gehaltenen Vorlesung wieder, deren wesentliche Absicht war: die Grundideen der Riemannschen Funktionentheorie in einer Form zu entwickeln, die allen modernen Anforderungen an *Strenge* völlig genüge leistet. Eine solche strenge Darstellung, die namentlich auch bei Begründung der fundamentalen, in die Funktionentheorie hineinspielenden Begriffe und Sätze der *Analysis situs* sich nicht auf anschauliche Plausibilität beruft, sondern mengentheoretisch exakte Beweise gibt, liegt bis jetzt nicht vor. Die wissenschaftliche Arbeit, die hier zu erledigen blieb, mag vielleicht als Leistung nicht sonderlich hoch bewertet werden. Immerhin glaube ich behaupten zu können, daß ich mit Ernst und Gewissenhaftigkeit nach den *einfachsten und sachgemäßesten* Methoden gesucht habe, die zu dem vorgegebenen Ziele führen; und an manchen Stellen habe ich dabei andere Wege einschlagen müssen als diejenigen, die in der Literatur seit dem Erscheinen von C. Neumanns klassischem Buche über „Riemanns Theorie der Abelschen Integrale“ (1865) traditionell geworden sind. In viel höherem Maße, als aus den Zitaten hervorgeht, bin ich dabei durch die in den letzten Jahren erschienenen grundlegenden topologischen Untersuchungen Brouwers, deren gedankliche Schärfe und Konzentration man bewundern muß, gefördert worden; und im stillen hoffe ich, daß etwas von dem Geist, der die Arbeiten dieses Forschers beseelt, auch in diesem meinem Buche lebendig geworden ist.

Es war früher üblich und ist, soviel ich sehe, bis jetzt in allen Darstellungen der Theorie der Riemannschen Flächen üblich geblieben, die Vorstellung der *Kurve,* wie sie in unserer sinnlichen Anschauung gegeben vorzuliegen scheint, ohne begriffliche Fixierung herüberzunehmen und von denjenigen Eigenschaften, welche sich uns an dieser Vorstellung mit einer Art anschaulicher Evidenz aufdrängen (z. B. von dem Satz, daß eine Kurve zwei Ufer hat) einen naiven Gebrauch zu machen. Die „anschauliche Evidenz“ enthebt uns aber, daran kann heute kein Zweifel mehr sein, keineswegs der Notwendigkeit, für eben diese Wahrheiten *Beweise* zu erbringen, die letzten Endes auf die Axiome der Arithmetik gestützt sind; zum mindesten werden solche Beweise nötig, sobald jene fließenden Anschauungen sich (wie es das Verfahren der Mathematik als exakter Wissenschaft mit sich bringt) zu allgemeinen abstrakten Begriffen ausgeweitet haben und in ihnen gleichsam erstarrt sind. Ist es doch sicher, daß der mathematische Allgemeinbegriff der „stetigen Kurve“ vieles deckt, wozu wir Korrespondierendes in unserer Anschauung nicht

vorfinden. Und eine strenge mengentheoretische Fundierung der für die Riemannsche Funktionentheorie in Frage kommenden topologischen Begriffe und Theoreme ist um so mehr erforderlich, als die „Punkte", aus denen hier die Grundgebilde (die Kurven und Flächen) bestehen, keine Raumpunkte im gewöhnlichen Sinne sind, sondern beliebige mathematische Dinge anderer Art (z. B. Funktionselemente) sein können. — Den Schwierigkeiten, welche der allgemeine Begriff der Kurve mit sich bringt, aber durch Spezialisation aus dem Wege zu gehen, indem man sich auf stetig differentiierbare oder auf analytische Kurven oder gar auf Polygone beschränkt, ist ein innerhalb der Analysis situs gewiß unzulässiges Verfahren; denn diese Disziplin verlangt einen Kurvenbegriff, der sich gegenüber beliebigen umkehrbar eindeutigen stetigen Punkttransformationen invariant verhält.

Es kann nicht geleugnet werden: die Entdeckung der sich weit über alle unsere Vorstellungen hinausspannenden Allgemeinheit solcher Begriffe wie „Funktion", „Kurve", usw. auf der einen Seite, das Bedürfnis nach logischer Strenge auf der anderen, so ersprießlich, ja notwendig sie für unsere Wissenschaft waren, haben in der Entwicklung der Mathematik von heute doch auch ungesunde Erscheinungen hervorgerufen. Ein Teil derjenigen mathematischen Produktion, die sich müht, diesen Begriffen bis in ihre letzten Feinheiten und — Verzerrungen nachzugehen oder sie in ihren weitesten Umrissen zu erfassen trachtet, hat, sich im Leeren verflüchtigend oder in Seitengängen versickernd, den Zusammenhang mit dem lebendigen Strom der Wissenschaft verloren. Auch die Idee der Riemannschen Fläche erheischt, wenn wir den rigorosen Forderungen der Moderne in bezug auf Exaktheit gerecht werden wollen, zu ihrer Darstellung eine Fülle von abstrakten und subtilen Begriffen und Überlegungen. Aber es gilt nur den Blick ein wenig zu schärfen, um zu erkennen, daß hier dieses ganze vielmaschige logische Gespinnst (in dem sich der Anfänger vielleicht verheddern wird) nicht das ist, worauf es im Grunde ankommt: es ist nur das *Netz*, mit dem wir die *eigentliche Idee*, die ihrem Wesen nach einfach und groß und göttlich ist, aus dem τόπος ἄτοπος, wie Plato sagt, — gleich einer Perle aus dem Meere — an die Oberfläche unserer Verstandeswelt heraufholen. Den Kern aber, den dieses Knüpfwerk von feinen und peinlichen Begriffen umhüllt, zu erfassen, — das, was das Leben, den wahren Gehalt, den inneren Wert der Theorie ausmacht — dazu kann ein Buch (und kann selbst ein Lehrer) nur dürftige Fingerzeige geben; hier muß jeder einzelne von neuem für sich um das Verständnis ringen.

Man begegnet noch hie und da der Auffassung, als ob die *Riemannsche Fläche* nichts weiter sei als ein „Bild", als ein (man gibt zu: *sehr* wertvolles, *sehr* suggestives) Mittel zur Vergegenwärtigung und Veranschaulichung der Vieldeutigkeit von Funktionen. Diese Auffassung ist von Grund aus verkehrt. Die Riemannsche Fläche ist ein unentbehrlicher *sachlicher* Bestandteil der Theorie, sie ist geradezu deren Fundament. Sie ist auch nicht etwas, was a posteriori mehr oder minder künstlich aus den analytischen Funktionen herausdestilliert wird, sondern muß durch-

aus als das prius betrachtet werden, als der Mutterboden, auf dem die Funktionen allererst wachsen und gedeihen können. Es ist freilich zuzugeben, daß Riemann selbst dies wahre Verhältnis der Funktionen zur Riemannschen Fläche durch die Form seiner Darstellung etwas verschleiert hat — vielleicht nur, weil er seinen Zeitgenossen allzu fremdartige Vorstellungen nicht zumuten wollte; dies Verhältnis auch dadurch verschleiert hat, daß er nur von jenen mehrblättrigen, mit einzelnen Windungspunkten über der Ebene sich ausbreitenden Überlagerungsflächen spricht, an welche man noch heute in erster Linie denkt, wenn von Riemannschen Flächen die Rede ist, und sich nicht der (erst später von Klein zu durchsichtiger Klarheit entwickelten) allgemeineren Vorstellung bediente, als deren Charakteristikum man dieses nennen kann: daß in ihr die Beziehung zu der Ebene einer unabhängigen komplexen Veränderlichen, sowie überhaupt die Beziehung zum dreidimensionalen Punktraum grundsätzlich gelöst ist. Und doch ist darüber kein Zweifel möglich, daß erst in der Kleinschen Auffassung die Grundgedanken Riemanns in ihrer natürlichen Einfachheit, ihrer lebendigen und durchschlagenden Kraft voll zur Geltung kommen. Auf dieser Überzeugung basiert die vorliegende Schrift.

Im einzelnen gliedert sich ihr Inhalt in folgender Weise. Im *I. Kapitel* handelt es sich um dreierlei:

1. eine genaue Auseinandersetzung des Verhältnisses der Weierstraßschen Begriffe *„analytische Funktion“* und *„analytisches Gebilde“* zu der Idee der Riemannschen Fläche (§§ 1—7);

2. eine strenge Fixierung des Begriffes der *Fläche* überhaupt und insbesondere der *Riemannschen Fläche* (§§ 4—7);

3. eine exakte Begründung derjenigen Analysis-situs-Sätze, die zum Aufbau der Riemannschen Funktionentheorie unbedingt von Nöten sind (§§ 8—11). In diesen topologischen Betrachtungen spielt der für die Uniformisierungstheorie so wichtige Begriff der *Überlagerungsfläche* eine weit größere Rolle (und, wie ich glaube, mit Recht), als ihm sonst zugewiesen wird.

Den Gegenstand von *Kapitel II* bildet vor allem das Grundproblem der Riemannschen Funktionentheorie: zu einer vorgegebenen Riemannschen Fläche die zugehörigen Funktionen zu finden, insbesondere für den Fall der geschlossenen Riemannschen Fläche. Die Existenzbeweise werden hier auf dem von Riemann selbst in Aussicht genommenen Wege mit Hilfe des sog. *Dirichletschen Prinzips* erbracht (§§ 12—15). Die Gangbarkeit dieses Weges hat bekanntlich Hilbert gezeigt, indem er das früher für evident gehaltene, aber dann von Weierstraß angefochtene Dirichletsche Minimalprinzip durch einen zuverlässigen Beweis stützte. Durch Berücksichtigung der an Hilbert anknüpfenden Arbeiten anderer Autoren und einen bisher unveröffentlichten, vom Verfasser herrührenden, gegenüber Riemann und Hilbert wesentlich vereinfachten Ansatz ist es gelungen, dieser Beweisführung eine so durchsichtige Gestalt zu verleihen, daß sie auch hinsichtlich ihrer Einfachheit der bisher allein in Lehrbüchern zur Darstellung gekommenen, von Schwarz und C. Neumann ersonnenen Methode des alternierenden Verfahrens ebenbürtig, wenn nicht

überlegen ist. Ihre große Tragweite bewährt sie dadurch, daß sie ohne Modifikation auf ungeschlossene Riemannsche Flächen übertragen werden kann; ein Umstand, welcher vor allem der Uniformisierungstheorie zu gute kommt. Die §§ 16—18 bringen dann einen Abriß der an die Existenztheoreme sich anschließenden systematischen Theorie der *Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche,* geben aber nur so viel von dieser Theorie, als nötig ist, um die funktionentheoretische Fruchtbarkeit der Riemannschen Grundidee deutlich zu machen und die beherrschende Rolle aufzuzeigen, welche die der Analysis situs entstammende Geschlechtszahl im Reiche der Funktionen spielt. Ich habe dabei, entgegen dem Brauch, an der aus dem Beweis der Existenzsätze ursprünglich sich ergebenden Normierung der Abelschen Integrale festgehalten, bei der Real- und Imaginärteil voneinander getrennt werden müssen, da diese Normierung den Vorteil hat, von jeder Zerschneidung der Riemannschen Fläche unabhängig zu sein. Die letzten Abschnitte endlich (§§ 19—21) sind der von Klein und Poincaré in kühnem Riß entworfenen, von Koebe in jüngster Zeit auf ein breites Fundament gestellten *Theorie der Uniformisierung* gewidmet. Wir betreten damit den Tempel, in welchem die Gottheit (wenn ich dieses Bildes mich bedienen darf) aus der irdischen Haft ihrer Einzelverwirklichungen sich selber zurückgegeben wird: in dem Symbol des *zweidimensionalen Nicht-Euklidischen Kristalls* wird das Urbild der Riemannschen Flächen selbst, (soweit dies möglich ist) rein und befreit von allen Verdunklungen und Zufälligkeiten, erschaubar. Es war darum klar, daß die entscheidenden Resultate der Uniformisierungstheorie mit in dieses Buch hineingehörten.

Bei der Herstellung des Manuskripts ist mir eine für das hiesige mathematische Lesezimmer von Herrn Frankfurther angefertigte Ausarbeitung meiner Vorlesung von großem Nutzen gewesen; für seine sorgfältige und hingebende Arbeit möchte ich auch an dieser Stelle Herrn Frankfurther meinen aufrichtigsten Dank aussprechen. Jene Vorlesung enthielt außer dem hier Reproduzierten noch einen Abriß der Theorie der elliptischen Funktionen, verbreitete sich mit größerer Vollständigkeit über die algebraischen Funktionen und brachte die Riemann-Weierstraßsche Lösung des Jacobischen Umkehrproblems mit Hilfe der ϑ-Reihen. Diese Dinge habe ich jetzt, da ihnen für die Idee der Riemannschen Fläche kaum eine grundsätzliche Wichtigkeit zukommt, bei Seite gelassen. Nicht ganz leichten Herzens habe ich ferner darauf verzichtet, von dem Riemannschen funktionentheoretischen Standpunkt aus die Brücke zu der kurventheoretischen Auffassung von Clebsch, Brill und Noether hinüber zu schlagen; aber es ist, namentlich durch die Zitate, dafür gesorgt, dem Leser nach verschiedenen Richtungen hin den Zugang zu derjenigen Literatur zu öffnen, in welcher er hierüber und über manche andere Weiterbildungen der Riemannschen Theorie Auskunft findet. Die Zitate enthalten zugleich, freilich unvollständig und in schwachen Umrissen, eine Geschichte der leitenden Ideen, welche diesen wichtigsten Teil der Funktionentheorie beherrschen.

Man wird vielleicht finden, daß ich mit der *Neuprägung von Worten*

allzu verschwenderisch umgegangen bin. Gegen den Grundsatz indes, daß an einer bereits eingebürgerten Terminologie nicht gerüttelt werden darf, glaube ich nirgends verstoßen zu haben. Darüber hinaus aber meine ich, hat jeder Autor das Recht nicht nur, sondern die Pflicht — wenn anders sein Buch überhaupt inneren Gehalt genug besitzt, um als Ganzes etwas zu bedeuten — dem darzubietenden Stoff die eigenbestimmte Formung, den passenden und adäquaten Ausdruck zu geben. Mag daraus vielleicht auch für denjenigen, der sich rasch über den Inhalt einzelner Abschnitte orientieren oder ihn mit dem Gedankengang anderer Werke vergleichen will, einige Unbequemlichkeit resultieren. Dadurch, daß die Begriffsnamen an der Stelle ihrer Einführung durch fetten Druck hervorgehoben sind, und durch ein auf den letzten Seiten des Buches befindliches eingehendes Sachregister wird jedoch, wie ich hoffe, auch für Übersichtlichkeit hinreichend Sorge getragen sein.

An *sachlichen Vorkenntnissen* brauche ich nicht viel vorauszusetzen; gewiß nicht mehr, als z. B. der erste Band des bekannten Osgoodschen Lehrbuches der Funktionentheorie (2. Aufl., Leipzig bei B. G. Teubner, 1912) enthält; ich nehme an, daß dem Leser die einfachsten Beispiele mehrblättriger Riemannscher Flächen und die Symbolik der Gruppentheorie geläufig sind. Wohl aber erfordert die Lektüre, wie ich glaube, ein nicht unerhebliches Maß abstrakt-mathematischer Schulung; man muß sich darauf verstehen, über den scheinbar komplizierten Begriffsbildungen und Gedankengängen niemals die innerlich einfachen Grundgedanken, um die das Ganze zentriert ist, aus dem Auge zu verlieren.

Die wichtigsten dieser Grundgedanken, soweit sie nicht unmittelbar den Schöpfungen Riemanns entstammen, rühren von dem Manne her, dem ich dies Buch in aufrichtiger und inniger Verehrung habe widmen dürfen. Herr Geheimrat Klein hat es sich, trotz Überlastung mit anderen Arbeiten und trotz seines angegriffenen Gesundheitszustandes, nicht nehmen lassen, den ganzen Stoff mit mir in öfteren mündlichen Unterhaltungen durchzusprechen; für seine Bemerkungen, die mich an mehreren Stellen veranlaßt haben, meine ursprüngliche Darstellung durch eine richtigere und sachgemäßere zu ersetzen, bin ich ihm zu größtem Danke verpflichtet. Für Verbesserungsvorschläge mannigfacher Art und Mithilfe bei der Korrektur habe ich ferner meinen Freunden, den Herren Koebe, Groß, Bieberbach und Weitzenböck herzlichst zu danken. Wie viel von dem, was ich im folgenden etwa an Neuem zu bieten habe, auf frühere Gespräche mit Koebe zurückgeht, vermag ich heute nicht mehr zu bestimmen. Von Herrn Dr. Groß (der mir mit unsäglicher Sorgfalt beim Korrekturlesen behilflich war) ist überhaupt erst die Anregung dazu ausgegangen, daß ich meine Vorlesung über Riemannsche Funktionentheorie vom Winter-Semester 1911/12, an der er als einer meiner Hörer teilnahm, für den Druck bearbeitete. Mein Dank gilt endlich dem Verlage von B. G. Teubner für die wohlbekannte Sorgfalt, die er dem so zustande gekommenen Buche in Satz und Ausstattung hat zuteil werden lassen.

Göttingen, April 1913.

Hermann Weyl.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Begriff und Topologie der Riemannschen Flächen.

Seite

§ 1. Weierstraß' Begriff der analytischen Funktion 1
§ 2. Begriff des analytischen Gebildes 5
§ 3. Verhältnis der Begriffe „analytische Funktion“ und „analytisches Gebilde“ zueinander 12
§ 4. Begriff der Fläche 16
§ 5. Beispiele von Flächen 25
§ 6. Analytische Gebilde, als Flächen betrachtet 30
§ 7. Begriff der Riemannschen Fläche 34
§ 8. Schlichtartige Flächen 43
§ 9. Überlagerungsflächen. Einfach zusammenhängende Flächen. Monodromiesatz und Cauchyscher Integralsatz 47
§ 10. Einseitigkeit und Zweiseitigkeit von Flächen. Der Residuensatz . 56
§ 11. Integralfunktionen. Geschlechtszahl. Kanonische Zerschneidung . 68

Zweites Kapitel.

Funktionen auf Riemannschen Flächen.

§ 12. Das Dirichletsche Integral 78
§ 13. Über das Poissonsche Integral 82
§ 14. Ansatz zum Beweis der Existenztheoreme. Aufstellung der Elementardifferentiale 91
§ 15. Beweis des Dirichletschen Prinzips 100
§ 16. Zusammenhänge zwischen den Differentialen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche 108
§ 17. Die eindeutigen Funktionen als Unterklasse der additiven und multiplikativen Funktionen. Riemann-Rochscher Satz und Abelsches Theorem 117
§ 18. Der algebraische Funktionenkörper. 134
§ 19. Uniformisierung 141
§ 20. Riemannsche Flächen und Nicht-Euklidische Bewegungsgruppen. Fundamentalbereiche. Poincarésche Θ-Reihen 148
§ 21. Konforme Abbildung einer Riemannschen Fläche auf sich selbst . . 159

Berichtigungen und Zusätze 166
Anhang: Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen 167
Verzeichnis der Begriffsnamen 180

Erstes Kapitel.

Begriff und Topologie der Riemannschen Flächen.

§ 1. Weierstraß' Begriff der analytischen Funktion.

Ist z eine komplexe Variable und a eine feste komplexe Zahl, so bezeichnet man nach Weierstraß als ein **Funktionselement mit dem Mittelpunkt** a eine jede nach ganzen positiven Potenzen von $z - a$ fortschreitende Reihe

$$(1) \qquad \mathfrak{P}(z-a) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \cdots,$$

welche nicht nur für $z = a$ konvergiert. Im übrigen können die Koeffizienten $A_0, A_1, A_2, \ldots$ beliebige komplexe Zahlen sein. Der Konvergenzbereich einer solchen Potenzreihe besteht entweder aus der ganzen komplexen z-Ebene oder aus dem Innern eines bestimmten Kreises $|z - a| < r$ $[r > 0]$, des „**Konvergenzkreises**", und einem Teil[1]) der auf der Peripherie $|z - a| = r$ dieses Kreises gelegenen Punkte.

Im Innern ihres Konvergenzkreises (worunter gegebenenfalls auch die ganze Ebene als Kreis vom Radius $r = \infty$ verstanden werden soll) stellt ein solches Funktionselement im Cauchyschen Sinne eine reguläre analytische Funktion vor. Umgekehrt ist aus den Elementen der Funktionentheorie bekannt, daß sich eine eindeutige regulär-analytische Funktion in der Umgebung $|z - a| < r$ einer Stelle a in eine in dieser Umgebung konvergente Potenzreihe (1) entwickeln läßt, falls die Umgebung ganz dem Regularitätsgebiete der analytischen Funktion angehört. Es gelangt dann allerdings durch die Potenzreihe nur ein kreisförmiges Stück des ganzen Funktionsfeldes zur Darstellung.

Geht man von der Potenzreihe aus, so muß das Bestreben darauf gerichtet sein, die Definition der analytischen Funktion, welche zunächst nur innerhalb des Konvergenzkreises durch die Potenzreihe (1) gegeben ist, in der Weise über weitere Gebiete der z-Ebene auszudehnen, daß sie bei dieser Ausdehnung ihres analytischen Charakters nicht verlustig geht. Das Mittel dazu ist das Weierstraßsche Prinzip der analytischen Fort-

1) Das Wort „Teil" (einer Menge) ist hier so zu verstehen, daß sowohl die ganze Menge als auch die (kein Element enthaltende) „leere Menge" mit unter diesen Begriff fällt.

setzung.[1]) Es zeigt sich, daß der Plan, ein möglichst weites Gebiet der z-Ebene für die zu definierende analytische Funktion zu erobern, nur auf eine einzige Weise ausführbar ist. Die Eindeutigkeit der Funktion geht aber bei dem Prozeß der analytischen Fortsetzung im allgemeinen verloren. Darin darf man nicht etwa einen Mangel erblicken, sondern es ist ein großer Vorzug, daß auf diese Weise auch die mehrdeutigen analytischen Funktionen einer exakten Behandlung fähig werden.

Ist b ein Wert von z, der dem Innern des Konvergenzkreises $|z-a|<r$ angehört, so entsteht durch Umordnen der Reihe (1) nach Potenzen von $z-b$, wie man weiß, eine neue Potenzreihe

$$(2)\qquad \mathfrak{Q}(z-b) = B_0 + B_1(z-b) + B_2(z-b)^2 + \cdots,$$

die zum mindesten in dem Kreise $|z-b| < r - |b-a|$ konvergiert; ihr Konvergenzkreis kann aber sehr wohl einen größeren Radius als $r - |b-a|$ haben. Da auf jeden Fall (1) und (2) in dem ihren beiden Konvergenzkreisen gemeinsamen Gebiet ihren Werten nach übereinstimmen, liefert uns dann (2) eine Ausdehnung der Definition unserer analytischen Funktion über den ursprünglichen Bereich hinaus. Wir wollen sagen, daß (2) eine **unmittelbare analytische Fortsetzung** von (1) ist. Der allgemeine Prozeß der (mittelbaren) **analytischen Fortsetzung** besteht darin, daß der der unmittelbaren analytischen Fortsetzung nicht bloß einmal, sondern eine beliebige endliche Zahl von Malen hintereinander angewendet wird — in analoger Weise etwa, wie in der projektiven Geometrie die allgemeine projektive Abbildung als Hintereinanderausführung einer beliebigen Anzahl unmittelbarer projektiver, d. i. perspektiver Abbildungen erklärt werden kann.

Die **analytische Fortsetzung** kann **längs einer gegebenen Kurve** $\mathfrak{c}$ vorgenommen werden. Das soll folgendes heißen. Es möge eine von dem Punkte $z = a$ auslaufende Kurve gegeben sein, d. h. es sei jedem reellen Wert λ im Intervall $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein Punkt z_λ der komplexen z-Ebene in stetiger Weise zugeordnet, $\lambda = 0$ insbesondere der Punkt $z_0 = a$, $\lambda = 1$ ein gewisser Punkt $z_1 = c$. Ferner sei jedem Wert des Parameters λ auch noch ein Funktionselement $\mathfrak{P}_\lambda$ mit dem Mittelpunkt z_λ zugeordnet; $\mathfrak{P}_0$ sei das gegebene Funktionselement (1), und es sei außerdem diese Bedingung erfüllt: Ist λ_0 irgend ein λ-Wert, $\mathfrak{c}'$ ein beliebiger ganz im Innern des Konvergenzkreises von $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$ liegender Teilbogen von $\mathfrak{c}$ (definiert durch eine Ungleichung von der Form $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$; ε eine positive Konstante),

1) Vgl. die in den Mathematischen Werken von Weierstraß, Bd. 1 (1894) zuerst veröffentlichte, im Jahre 1842 verfaßte Abhandlung über die „Definition analytischer Funktionen einer Veränderlichen vermittelst algebraischer Differentialgleichungen", namentlich S. 83—84; ferner die ersten Seiten in Riemanns „Theorie der Abelschen Funktionen" (1857) [Werke, 2. Aufl., S. 88—89]. Encyklopädie II B 1 (Artikel von Osgood), Nr. 13.

so entstehen die Funktionselemente $\mathfrak{P}_\lambda$, welche den dieser Ungleichung genügenden λ-Werten zugehören, alle durch unmittelbare analytische Fortsetzung aus $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$. Dann sagen wir, es sei gelungen, das vorgegebene Element (1) längs $\mathfrak{c}$ analytisch fortzusetzen, und nennen $\mathfrak{P}_1$ dasjenige Funktionselement mit dem Mittelpunkt c, welches durch analytische Fortsetzung längs $\mathfrak{c}$ aus (1) entsteht. Es geht alsdann umgekehrt durch analytische Fortsetzung längs der rückwärts durchlaufenen Kurve $\mathfrak{c}$ aus $\mathfrak{P}_1$ das Element $\mathfrak{P}_0$ hervor.

Die analytische Fortsetzung längs einer vorgegebenen Kurve $\mathfrak{c}$ *ist, wenn überhaupt, nur auf eine Weise möglich.* Hätte man nämlich zwei verschiedene analytische Fortsetzungen

$$\mathfrak{P}_\lambda, \quad \mathfrak{P}^*_\lambda,$$

so sei λ_0 die untere Grenze aller derjenigen λ-Werte, für welche die zugehörigen Potenzreihen $\mathfrak{P}_\lambda$, $\mathfrak{P}^*_\lambda$ nicht übereinstimmen. $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$, $\mathfrak{P}^*_{\lambda_0}$ mögen beide in dem Kreise $|z - z_{\lambda_0}| < r_0$ konvergieren. Man kann dann durch eine Ungleichung der Form $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$ einen Bogen $\mathfrak{c}_0$ auf $\mathfrak{c}$ abgrenzen, der ganz in dem um z_{λ_0} mit dem Radius $\frac{1}{2} r_0$ beschriebenen Kreise liegt. Die zu den Punkten dieses Bogens gehörigen $\mathfrak{P}_\lambda$, $\mathfrak{P}^*_\lambda$ entstehen durch unmittelbare analytische Fortsetzung aus $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$, $\mathfrak{P}^*_{\lambda_0}$, und da unter den jener Ungleichung genügenden λ-Werten sich solche finden, für die $\mathfrak{P} \neq \mathfrak{P}^*$ ist, muß auch $\mathfrak{P}_{\lambda_0} \neq \mathfrak{P}^*_{\lambda_0}$ sein. Daher kann λ_0 nicht $= 0$ sein. Ist dann λ_1 ein Wert > 0 und $> \lambda_0 - \varepsilon$, aber $< \lambda_0$, so entstehen $\mathfrak{P}_{\lambda_0}$, $\mathfrak{P}^*_{\lambda_0}$ durch unmittelbare analytische Fortsetzung aus $\mathfrak{P}_{\lambda_1} = \mathfrak{P}^*_{\lambda_1}$. Das ist ein Widerspruch. Damit ist insbesondere gezeigt, daß das endständige Element $\mathfrak{P}_1$ durch das Ausgangselement und die Fortsetzungskurve eindeutig bestimmt ist.

Wir haben uns ferner zu überlegen, daß man durch endlichmalige Anwendung unmittelbarer analytischer Fortsetzung — wobei die auftretenden Elementmittelpunkte aufeinanderfolgende Punkte der Kurve $\mathfrak{c}$ sind — von dem Anfangselement zum Endelement gelangen kann. In der Tat: hat eines der Funktionselemente $\mathfrak{P}_\lambda$ den Konvergenzradius $r = \infty$, so trifft das auch für alle andern, insbesondere für das Ausgangselement, zu, und das Endelement entsteht bereits durch einmalige Anwendung der unmittelbaren analytischen Fortsetzung aus ihm. Andernfalls gehört zu jedem λ ein endlicher Konvergenzradius r_λ von $\mathfrak{P}_\lambda$. Ist λ_1 irgendein Wert des Parameters λ, so behaupte ich, wird

$$|r_\lambda - r_{\lambda_1}| \leqq |z_\lambda - z_{\lambda_1}|,$$

sein, solange sich λ hinreichend wenig von λ_1 unterscheidet, und daraus folgt, daß r_λ stetig von λ $(0 \leqq \lambda \leqq 1)$ abhängt. Ist nämlich λ_2 $(> \lambda_1)$ ein solcher λ-Wert, daß der ganze Kurvenbogen z_λ $(\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2)$ im Innern des um z_{λ_1} mit dem Radius $\frac{1}{2} r_{\lambda_1}$ beschriebenen Kreises liegt, so entsteht $\mathfrak{P}_{\lambda_2}$ aus $\mathfrak{P}_{\lambda_1}$ durch unmittelbare analytische Fortsetzung, und es ist also

$$r_{\lambda_2} \geqq r_{\lambda_1} - |z_{\lambda_2} - z_{\lambda_1}|.$$

1*

Da der ganze Bogen z_λ ($\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2$) aber auch in dem Konvergenzkreis von $\mathfrak{P}_{\lambda_2}$ enthalten ist, gilt auch umgekehrt

$$r_{\lambda_1} \geqq r_{\lambda_2} - | z_{\lambda_1} \quad z_{\lambda_2}$$

Aus der somit erwiesenen Stetigkeit folgt, daß r_λ ein *positives* Minimum r^0 besitzt. Wählen wir nun die Werte $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n = 1$ so, daß $|z_\lambda - z_{\lambda_h}| < r^0$ bleibt für $\lambda_h \leqq \lambda \leqq \lambda_{h+1}$ $[h = 0, 1, \ldots n-1]$, so entsteht in der Reihe $\mathfrak{P}_{\lambda_0}, \mathfrak{P}_{\lambda_1}, \ldots \mathfrak{P}_{\lambda_n}$ jedes Funktionselement aus dem vorhergehenden durch unmittelbare analytische Fortsetzung.

Ist die Fortsetzung des Anfangselementes längs $\mathfrak{C}$ unmöglich, so gibt es auf der Kurve einen bestimmten Punkt, den „**kritischen Punkt**“, an dem das Verfahren notwendig seine Grenze findet. Genauer formuliert: es gibt eine Schwelle $\lambda = \Lambda_0$ von der folgenden Art. Ist $\lambda_0 < \Lambda_0$, so läßt sich der Prozeß der analytischen Fortsetzung längs der Teilkurve $z = z_\lambda$ $(0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0)$ ausführen, dies hört aber von $\lambda_0 = \Lambda_0$ ab auf. Dabei kann natürlich auch $\Lambda_0 = 1$, d. h. erst der Endpunkt von $\mathfrak{C}$ der kritische Punkt sein; dagegen ist stets $\Lambda_0 > 0$.

Noch ein Satz über analytische Fortsetzung ist von Wichtigkeit. Hat man zwei Kurven

$$z = z_1(\lambda), \quad z = z_2(\lambda),$$

die von demselben Punkt a $\{= z_1(0) = z_2(0)\}$ zu demselben Endpunkt c führen und dabei immer in hinreichender Nähe voneinander bleiben, so läßt sich die analytische Fortsetzung, falls sie sich längs der ersten Kurve vollziehen läßt, auch längs der zweiten ausführen und liefert das gleiche Endelement. Die Bedingung, daß die Kurven in hinreichender Nähe voneinander bleiben sollen, besagt: es gibt eine positive Zahl δ derart, daß, wenn für alle λ die Ungleichung $|z_1(\lambda) - z_2(\lambda)| < \delta$ erfüllt ist, die Behauptung unseres Satzes zutrifft. Der Beweis ergibt sich ohne weiteres daraus, daß man das endständige Element durch endlichmalige Anwendung des Prozesses der unmittelbaren analytischen Fortsetzung aus dem Anfangselement gewinnen kann.

Nunmehr sind wir imstande, die allgemeine Weierstraßsche Definition der analytischen Funktion so auszusprechen: *Eine* **analytische Funktion** *ist die Gesamtheit* $\mathfrak{G}$ *aller derjenigen Funktionselemente, die aus einem gegebenen Funktionselement durch analytische Fortsetzung entstehen können.*

Jedes Funktionselement von $\mathfrak{G}$ läßt sich aus jedem solchen durch analytische Fortsetzung gewinnen.

Zwei analytische Funktionen $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{G}_2$, von denen sich nachweisen läßt, daß sie ein einziges Funktionselement gemein haben, sind überhaupt identisch, d. h. jedes Element von $\mathfrak{G}_1$ ist auch in $\mathfrak{G}_2$ enthalten und umgekehrt.

Ist

$$\mathfrak{P}(z-a) = A_0 + A_1(z-a) + A_2(z-a)^2 + \ldots$$

ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriges Funktionselement, so heißt die Zahl A_0 ein **Wert** der analytischen Funktion $\mathfrak{G}$ im Punkte $z = a$.

Gewiß hat diese Weierstraßsche Auffassung der mehrdeutigen analytischen Funktion als einer *Gesamtheit von Funktionselementen* auf den ersten Blick etwas Künstliches. Wenn man von $\sqrt{z}$ oder $\lg z$ spricht, stellt man sich dabei kaum die Gesamtheit derjenigen Potenzreihen vor, welche Stücke dieser mehrdeutigen Funktionen darzustellen vermögen. Trotzdem aber bewährt sich die Weierstraßsche Definition, der man Einfachheit und Präzision nicht absprechen kann, als fester Ausgangspunkt für die analytische Funktionentheorie. Durch allmähliche Verarbeitung der Weierstraßschen werden wir in der Folge zu der Riemannschen Auffassung gelangen, in der die unabhängige Variable z ebenso wie die bisher durch eine Gesamtheit $\mathfrak{G}$ von Funktionselementen repräsentierte abhängige Variable u als eindeutige analytische Funktionen eines Parameters erscheinen, eines Parameters freilich, der im allgemeinen nicht in einer komplexen Ebene, sondern auf einer gewissen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit, der sogenannten Riemannschen Fläche, variiert.

Zunächst aber haben wir den Begriff der analytischen Funktion mit Weierstraß zu dem des analytischen Gebildes zu erweitern.

§ 2. Begriff des analytischen Gebildes.

Aus einer analytischen Funktion entsteht das analytische Gebilde dadurch, daß man die Funktion nicht wie bisher bloß an denjenigen Stellen betrachtet, wo sich dieselbe regulär verhält, sondern die Stellen hinzunimmt, in denen sie einen Verzweigungspunkt endlich hoher Ordnung oder einen Pol (oder beides zugleich) besitzt. Die strenge Formulierung des Begriffes des analytischen Gebildes erhalten wir, wenn wir den bisherigen Begriff des Funktionselementes in gehöriger Weise erweitern[1]).

Das Funktionselement (1) : $u = \mathfrak{P}(z-a)$ können wir mit Hilfe eines komplexen Parameters t so darstellen:

$$z = a + t, \quad u = \mathfrak{P}(t) = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots$$

Indem wir hierin die bevorzugte Rolle, welche z spielt, aufgeben und außerdem auch endlich viele negative Potenzen von t zulassen, kommen wir zu der allgemeineren Erklärung:

Es seien

$$z = P(t), \; u = Q(t)$$

irgend zwei Reihen, die nach ganzzahligen Potenzen von t fortschreiten

1) Siehe Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten (bearbeitet von G. Hettner und I. Knoblauch), Werke, Bd. 4, S. 16—19.

und nur endlichviele negative Potenzen von t enthalten, von der Art, daß in einer gewissen Umgebung $|t| < r$ (r eine positive Konstante) des Nullpunktes der t-Ebene 1) beide Reihen konvergieren und 2) niemals für zwei verschiedene t-Werte dieser Umgebung sich das gleiche Wertepaar (z, u) ergibt: so sagen wir, dieses Paar von Potenzreihen **definiere ein Funktionselement.**

Unsere Meinung geht nicht dahin, daß wir unter „Funktionselement" direkt das Potenzreihenpaar $P(t)$, $Q(t)$ verstehen; vielmehr fassen wir diese beiden Reihen nur als eine *Darstellung* des gemeinten Funktionselementes auf, das neben dieser noch unendlich viele gleichberechtigte Darstellungen gestattet. Hinsichtlich des Übergangs von einer solchen Darstellung zu einer andern treffen wir folgende naheliegenden Verabredungen.

Ersetzt man sowohl in $P(t)$ als in $Q(t)$ den Parameter t durch eine Potenzreihe

$$t(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots,$$

so gehe $P(t)$ in die Potenzreihe $\Pi(\tau)$, $Q(t)$ in $K(\tau)$ über. Wir setzen voraus, daß $t(\tau)$ in einer gewissen Umgebung von $\tau = 0$ konvergent und der erste Koeffizient $c_1 \neq 0$ ist; dann können wir um $\tau = 0$ mit Hilfe einer gewissen positiven Konstanten ϱ eine solche Umgebung $|\tau| < \varrho$ abgrenzen, daß $t(\tau)$ in ihr 1) konvergiert und dem absoluten Betrage nach $< r$ bleibt und 2) an zwei verschiedenen Stellen τ stets zwei verschiedene Werte annimmt. In dieser Umgebung $|\tau| < \varrho$ konvergieren dann auch Π und K und an zwei verschiedenen Stellen τ_1, τ_2 dieser Umgebung ist niemals gleichzeitig $\Pi(\tau_1) = \Pi(\tau_2)$, $K(\tau_1) = K(\tau_2)$. Das Paar Π, K nennen wir dem ursprünglichen P, Q **äquivalent**, und zwar wie auch die Koeffizienten $c_1, c_2, \ldots$ der substituierten Reihe $t(\tau)$ beschaffen sein mögen, wenn nur Konvergenz statthat und $c_1 \neq 0$ ist. Diese letztere Voraussetzung hat zur Folge, daß umgekehrt $P(t)$, $Q(t)$ dadurch aus $\Pi(\tau)$, $K(\tau)$ erhalten werden können, daß man für τ eine gewisse Potenzreihe in t einsetzt:

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots \quad \left(\gamma_1 = \frac{1}{c_1} \neq 0\right).$$

Das Verhältnis der Äquivalenz ist also ein wechselseitiges. Außerdem ist offenbar jedes Potenzreihenpaar sich selbst äquivalent, und wenn zwei Potenzreihenpaare einem dritten äquivalent sind, sind sie auch untereinander äquivalent. Diese Tatsachen berechtigen dazu, äquivalente Potenzreihenpaare als Darstellungen *desselben*, nicht-äquivalente als Darstellungen *verschiedener* Funktionselemente aufzufassen. Oder anders ausgedrückt: *Zwei Paare von Potenzreihen, welche je ein Funktionselement definieren, definieren dann und nur dann dasselbe Funktionselement, wenn sie äquivalent sind.*

Wir stützen uns hier auf eine Erklärungsweise, deren man sich auch sonst vielfach in der Mathematik bedienen muß und die ihre psychologischen Wurzeln in der Fähigkeit unseres Geistes zur *Abstraktion* hat. Diese Art von Definitionen beruht auf dem folgenden allgemeinen Prinzip: Ist zwischen Dingen irgend eines Operationsbereiches eine Beziehung $\sim$ erklärt *vom Charakter der Äquivalenz* [d. h. eine Beziehung, die den Regeln genügt:

$$1.\ a \sim a;\quad 2.\ \text{aus } a \sim b \text{ folgt } b \sim a;$$
$$3.\ \text{aus } a \sim c,\ b \sim c \text{ folgt } a \sim b],$$

so ist es möglich, jedes der Objekte a jenes ursprünglichen Operationsbereiches als *Repräsentant eines Dinges* α derart aufzufassen, daß zwei Objekte a, b dann und nur dann als Repräsentanten desselben Dinges α erscheinen, falls sie im Sinne der Beziehung $\sim$ einander äquivalent sind. Dieses Prinzip wird namentlich dann immer anzuwenden sein, wenn uns an den Objekten $a, b, \ldots$ nur diejenigen Eigenschaften interessieren, welche gegenüber der Beziehung $\sim$ invariant sind. Seine Anwendung hat den Erfolg, daß eine schwerfällige Ausdrucksweise durch eine kürzere ersetzt wird, die dem herrschenden Interessestandpunkt der Untersuchung dadurch Rechnung trägt, daß sie von selbst alles im Sinne dieses Standpunktes *Unwesentliche* an den untersuchten Objekten *abstreift*. Ich erwähne hier zwei Beispiele einer derartigen „*Definition durch Abstraktion*".

1. Von zwei parallelen Geraden sagt man, sie haben dieselbe *Richtung*, von zwei nicht-parallelen, sie haben verschiedene Richtung. Die ursprünglichen Objekte (a) sind die Geraden, die Beziehung vom Charakter der Äquivalenz ist die Parallelität; verlangt wird, jeder Geraden ein Etwas, seine „Richtung", so zuzuordnen, daß der Parallelität der Geraden die Identität der zugeordneten „Richtungen" entspricht.

2. Eine „Bewegung" (eines Punktes) ist gegeben, wenn die Lage des beweglichen Punktes p in jedem Moment λ eines gewissen Zeitintervalls $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ gegeben ist: $p = p(\lambda)$. Hat man zwei solche Bewegungen $p = p(\lambda)$, $q = q(\mu)$, so sagt man dann und nur dann, diese Bewegungen durchlaufen denselben „*Weg*", falls λ, der Zeitparameter der ersten Bewegung, sich derart als stetige monoton wachsende Funktion des Zeitparameters μ der zweiten Bewegung ansetzen läßt: $\lambda = \lambda(\mu)$, daß dadurch die erste Bewegung in die zweite übergeht: $p(\lambda(\mu)) \equiv q(\mu)$. Hier ist es der Begriff des „Weges", der auf diese Weise definiert werden soll[1]).

Von dieser Abschweifung kehren wir zu unserm erweiterten Begriff des Funktionselementes zurück. Unter allen äquivalenten Darstellungen

1) Dieser Begriff meint etwas Anderes als die *Punktmenge*, welche aus allen während der Bewegung passierten Punkten besteht. Es handelt sich hier um den gleichen Unterschied wie zwischen dem von einem Fußgänger zurückgelegten Wege (der, solange der Fußgänger marschiert, in statu nascendi ist) und dem (seit langem existierenden) Wege, *auf dem* er marschiert.

eines und desselben Funktionselementes werden wir versuchen, eine bestimmte, möglichst einfache als „*Normaldarstellung*" herauszuheben. Dabei unterscheiden wir mehrere Fälle. Enthält $P(t)$ keine negativen Potenzen von t:

$$z = P(t) = a + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots$$

und ist $a_1 \neq 0$, so können wir $z - a = \tau$ als neuen darstellenden Parameter einführen und bekommen

$$z = a + \tau, \quad u = \mathsf{K}(\tau) \tag{3}$$

als neue Darstellung desselben Funktionselements. Enthält auch $Q(t)$ keine negativen Potenzen, so gilt das Gleiche von K, und wir haben ein solches Funktionselement vor uns, wie wir sie in § 1 betrachteten und die wir jetzt zum Unterschied als **reguläre Funktionselemente** bezeichnen wollen. (3) ist die gesuchte Normaldarstellung. Ein reguläres Funktionselement gestattet nur eine einzige Normaldarstellung, und es sind daher zwei reguläre Funktionselemente sicher dann verschieden, wenn ihre Normaldarstellungen verschieden sind. Erst auf Grund dieser Umstände sind wir eigentlich berechtigt, unsern jetzigen Begriff des Funktionselementes als eine Erweiterung des in § 1 zu Grunde gelegten zu bezeichnen.

Kommen in der Entwicklung von z keine Potenzen von t mit negativem Exponenten vor, nehmen wir aber allgemeiner an, daß

$$z = a + a_\mu t^\mu + a_{\mu+1} t^{\mu+1} + \cdots \quad (a_\mu \neq 0),$$

also $a_\mu \, (\mu \geqq 1)$ der erste von 0 verschiedene Koeffizient außer dem konstanten Gliede ist, so kann man für t eine solche Potenzreihe in τ

$$t = c_1 \tau + c_2 \tau^2 + \cdots \quad (c_1 \neq 0)$$

setzen, daß

$$z = a + \tau^\mu$$

wird, und wir bekommen eine Darstellung von der Form

$$z = a + \tau^\mu, \quad u = \mathsf{K}(\tau). \tag{3*}$$

In der Tat: wenn $\sqrt[\mu]{a_\mu}$ eine bestimmte der μ Wurzeln ist, so gibt es bekanntlich eine einzige Potenzreihe $\gamma_1 + \gamma_2 t + \gamma_3 t^2 + \cdots$ mit dem Anfangsglied $\gamma_1 = \sqrt[\mu]{a_\mu}$, deren μ^{te} Potenz $= a_\mu + a_{\mu+1} t + \cdots$ ist. Durch Auflösung von

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots$$

nach t erhält man das gewünschte Resultat. Je nachdem aber, welche der μ Wurzeln $\sqrt[\mu]{a_\mu}$ man nimmt, erhält man μ verschiedene Darstellungen (3*): sie entstehen alle aus einer von ihnen, indem man τ durch $\tau \cdot \zeta$ ersetzt, wo ζ eine beliebige μ^{te} Einheitswurzel bedeutet. Ein durch

$$z = a' + \tau^{\mu'}, \quad u = \mathsf{K}'(\tau) \quad [\mu' \text{ ganz und positiv}] \tag{4}$$

gegebenes Funktionselement kann nur dann mit dem durch (3*) dargestellten identisch sein, wenn $a' = a$; $\mu' = \mu$ ist und überhaupt (4) mit einer der durch die Substitutionen $\tau | \tau \cdot \zeta$ aus (3*) entstehenden μ Normaldarstellungen Koeffizient für Koeffizient übereinstimmt. Insbesondere ist demnach die ganze Zahl μ charakteristisch für das betreffende Funktionselement und unabhängig von seiner besonderen Darstellung; wir sagen, das Element sei **von der $(\mu - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung verzweigt**; im Falle $\mu = 1$, den wir oben betrachteten, heißt es **unverzweigt.**

Kommen in der Entwicklung von z negative Potenzen von t vor, so sei $t^{-\nu}$ die niedrigste:

$$z = a_{-\nu} \cdot t^{-\nu} + a_{-\nu+1} t^{-\nu+1} + \cdots \quad (a_{-\nu} \neq 0).$$

Man kann t durch eine solche konvergente Potenzreihe in τ: $t = c_1 \tau + \cdots$ $(c_1 \neq 0)$ ersetzen, daß

$$(3^{**}) \qquad z = \tau^{-\nu} \quad \text{und dann} \quad u = \mathsf{K}(\tau)$$

wird. Das ist jetzt die Normaldarstellung; sie ist, wenn $\nu > 1$, durch das Element nicht eindeutig bestimmt, sondern es gibt deren genau ν verschiedene, die alle aus einer dadurch hervorgehen, daß man τ ersetzt durch $\tau \cdot \zeta$, wo ζ eine beliebige ν^{te} Einheitswurzel. Auch hier spricht man von einer Verzweigung der $(\nu - 1)^{\text{ten}}$ Ordnung.

Bei Herleitung der Normaldarstellungen (3), (3*), (3**) haben wir wie in § 1 die Variable z vor u ausgezeichnet. Neben die regulären Funktionselemente sind die irregulären, neben die unverzweigten die verzweigten getreten. Indem wir nunmehr die Begriffe der unmittelbaren und mittelbaren analytischen Fortsetzung auf beliebige (auch irreguläre) Funktionselemente übertragen, gelangen wir ohne weiteres zu der Definition des analytischen Gebildes.

Es sei $\mathfrak{e}$ ein Funktionselement und

$$(5) \qquad z = P(t), \quad u = Q(t)$$

irgendeine Darstellung desselben, $|t| < r$ $(r > 0)$ irgendein Kreis, in welchem diese Darstellung **gültig** ist (d. h. in welchem $P(t)$, $Q(t)$ konvergieren und niemals gleichzeitig $P(t_1) = P(t_2)$, $Q(t_1) = Q(t_2)$ für $t_1 \neq t_2$, $|t_1| < r$, $|t_2| < r$ eintritt). Für jeden Wert t_0, für den $|t_0| < r$ ist, können wir dann die Reihen $P(t)$, $Q(t)$ nach Potenzen von $t' = t - t_0$ umordnen und erhalten so ein neues Potenzreihenpaar $P'(t')$, $Q'(t')$ und damit ein neues Funktionselement $\mathfrak{e}_{t_0}$. Von allen so den verschiedenen im Kreise $|t_0| < r$ gelegenen t_0 zugehörigen Funktionselementen $\mathfrak{e}_{t_0}$ sagen wir, sie bilden eine **analytische Umgebung** des ursprünglichen Elementes $\mathfrak{e} (= \mathfrak{e}_0)$, und dieser Name soll angewendet werden, welche Darstellung des Elementes $\mathfrak{e}$ durch einen Parameter t und welcher Kreis $|t| < r$, in dem diese Darstellung gültig ist, auch gewählt wurde. Die oben beschriebene, durch die Darstellung (5) zusammen mit der Ungleichung $|t| < r$ bestimmte analytische

Umgebung nennen wir, wo eine kurze Benennung erwünscht ist, mit Rücksicht auf den darstellenden Parameter eine t-Umgebung.

Hat man zwei verschiedene Darstellungen desselben Funktionselements $\mathfrak{e}$:

$$z = P(t), \quad u = Q(t); \quad \text{bzw.} \quad z = \Pi(\tau), \quad u = \mathrm{K}(\tau)$$

(die durch die Substitution

$$t = t(\tau) = c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots [c_1 \neq 0]$$

ineinander übergehen mögen), so gilt der wichtige Satz:

Jede t-Umgebung von $\mathfrak{e}$ enthält eine τ-Umgebung von $\mathfrak{e}$ und also auch umgekehrt jede τ-Umgebung eine t-Umgebung.

Beweis: Die t-Umgebung sei durch $|t| < r$ bestimmt. Wir wählen dann eine positive Zahl ϱ so, daß in $|\tau| < \varrho$ die Potenzreihe $t(\tau)$ konvergiert, dem absoluten Betrage nach $< r$ bleibt und keinen Wert zweimal annimmt. Diese Ungleichung $|\tau| < \varrho$ bestimmt eine τ-Umgebung, von der ich behaupte, daß sie in der ursprünglichen t-Umgebung enthalten ist. Durch Umordnen von $\Pi(\tau)$, $\mathrm{K}(\tau)$ nach Potenzen von $\tau' = \tau - \tau_0$ ($|\tau_0| < \varrho$) entstehe die Darstellung $\Pi'(\tau')$, $\mathrm{K}'(\tau')$ des Elements $\mathfrak{e}_{\tau_0}$, durch Umordnen von $P(t)$, $Q(t)$ nach Potenzen von $t' = t - t_0$ $[t_0 = t(\tau_0), |t_0| < r]$ das Element $(P'(t'), Q'(t')) = \mathfrak{e}_{t_0}$; dann ist $\mathfrak{e}_{\tau_0} = \mathfrak{e}_{t_0}$. Dadurch nämlich, daß man $t(\tau)$ nach Potenzen von $\tau' = \tau - \tau_0$ umordnet, bekommt man

$$t'(\tau') = t(\tau) - t_0 = c_1'\tau' + c_2'\tau'^2 + \cdots, \tag{6}$$

und es ist offenbar

$$P'(t'(\tau')) = \Pi'(\tau'), \quad Q'(t'(\tau')) = \mathrm{K}'(\tau');$$

denn in einer gewissen Umgebung des Punktes τ_0 der komplexen τ-Ebene sind z. B. $\Pi'(\tau - \tau_0)$, $P'(t(\tau) - t_0)$ reguläre Funktionen, die dem Werte nach mit $\Pi(\tau)$ übereinstimmen. In der Substitution (6), die das Paar $P'(t')$, $Q'(t')$ in $\Pi'(\tau')$, $\mathrm{K}'(\tau')$ überführt, ist aber der erste Koeffizient $c_1' = \left[\frac{dt(\tau)}{d\tau}\right]_{\tau=\tau_0} \neq 0$, da sonst die Funktion $t(\tau)$ in der Nähe von $\tau = \tau_0$ einen und denselben Wert t immer an mindestens zwei Stellen annehmen würde. Damit ist die Identität von $\mathfrak{e}_{\tau_0}$, $\mathfrak{e}_{t_0}$ bewiesen.

Der hier eingeführte Begriff der analytischen Umgebung entspricht in einer für die weiteren Formulierungen zweckmäßigeren Form dem in § 1 an seiner Stelle benutzten Begriff der unmittelbaren analytischen Fortsetzung. In diesem Begriff der analytischen Umgebung tritt es auch zutage, daß die irregulären Elemente gegenüber den regulären nur als Ausnahmestellen zu betrachten sind; denn die analytische Umgebung eines jeden Elements, wenn sie nur hinreichend klein genommen wird, besteht (abgesehen vielleicht von diesem Element selbst) stets ausschließlich aus regulären Funktionselementen. Um dies einzusehen, braucht man nur den die gesuchte Umgebung von $\mathfrak{e} = (P(t), Q(t))$ bestimmenden Kreis $|t| < r$ so

klein zu wählen, daß in ihm (außer vielleicht für $t = 0$) durchweg $\frac{dP}{dt} \neq 0$ ist.

Eine **analytisch zusammenhängende Reihe von Funktionselementen** ist gegeben, wenn jedem reellen Werte λ des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein Funktionselement $\mathfrak{e}(\lambda)$ zugeordnet ist, so daß diese Bedingung erfüllt ist: Ist λ_0 irgend ein Wert des Parameters λ, $\mathfrak{e}_0 = \mathfrak{e}(\lambda_0)$ das zugehörige Funktionselement, $\mathfrak{U}_0$ eine beliebige analytische Umgebung von $\mathfrak{e}_0$, so gibt es immer eine positive Zahl ε derart, daß $\mathfrak{e}(\lambda)$ zu $\mathfrak{U}_0$ gehört, solange $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$ ist. Die analytisch zusammenhängende Reihe **verbindet** das Anfangselement $\mathfrak{e}(0)$ mit dem Endelement $\mathfrak{e}(1)$.

Ein **analytisches Gebilde** *ist eine Gesamtheit* $\mathfrak{G}$ *von Funktionselementen mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Je zwei Funktionselemente, die zu* $\mathfrak{G}$ *gehören, können durch eine analytisch zusammenhängende Reihe von lauter zu* $\mathfrak{G}$ *gehörigen Funktionselementen mit einander verbunden werden.*

2. $\mathfrak{G}$ *läßt sich durch Hinzufügung von Funktionselementen auf keine Weise so erweitern, daß auch die erweiterte Gesamtheit noch die Eigenschaft 1. besitzt.*

Aus 2. folgt insbesondere, daß mit einem Funktionselement $\mathfrak{e}$ auch eine jede analytische Umgebung von $\mathfrak{e}$ zu $\mathfrak{G}$ gehört.

Diese Erklärungen können wir uns durch eine Analogie näher bringen. Offenbar übernimmt ja in der Funktionentheorie das Weierstraßsche Funktionselement die gleiche Rolle, welche in der Geometrie, etwa des dreidimensionalen Raumes, der *Punkt* als Raumelement spielt. Das Funktionselement stellen wir also in Analogie zum Punkt, und, wie vom dreidimensionalen Punktraum, sprechen wir dann vom „Raum (d. h. nichts Anderes als: von der Gesamtheit) der Funktionselemente"; da allerdings die Festlegung eines Funktionselementes von unendlich vielen stetig veränderlichen Bestimmungsstücken abhängt, müssen wir diesem Raum unendlich viele Dimensionen zuschreiben. Alle Begriffe, welche die *Kontinuität* des dreidimensionalen Raumes betreffen, lassen sich auf den einen: „*Umgebung* eines Punktes" zurückführen (als Umgebung eines Punktes betrachten wir etwa das Innere einer jeden um diesen Punkt als Mittelpunkt beschriebenen Kugel). Im Raum der Funktionselemente soll das, was wir oben „analytische Umgebung" nannten, das Analogon des gewöhnlichen Begriffs „Umgebung" im Punktraum abgeben. Dann entspricht die *analytisch zusammenhängende Reihe von Funktionselementen* ganz genau der *stetigen Kurve* im Punktraum. Der Raum der Funktionselemente besitzt nach diesen Festsetzungen eine wesentlich andere Struktur als der gewöhnliche dreidimensionale Raum: während nämlich der Punktraum ein einziges zusammenhängendes Ganze ausmacht (je zwei seiner Punkte lassen sich durch eine stetige Kurve

verbinden), zerfällt der unendlich-dimensionale Raum der Funktionselemente in unendlich viele (zweidimensionale) „Schichten“; jede solche Schicht für sich ist ein stetig (d. h. hier: analytisch) zusammenhängendes Ganze, aber die einzelnen Schichten stehen untereinander an keiner Stelle in Verbindung; diese „Schichten“ sind eben die analytischen Gebilde. Im Euklidischen Punktraum bezeichnet man als *„Gebiet“* eine Punktmenge von der Beschaffenheit, daß 1. zu jedem Punkt der Menge eine Umgebung existiert, die ganz der Menge angehört, und 2. je zwei Punkte der Menge sich durch eine stetige, aus lauter Punkten der Menge bestehende Kurve verbinden lassen. Darnach würde im Raum der Funktionselemente das analytische Gebilde als ein *keiner weiteren Ausdehnung fähiges Gebiet* zu bezeichnen sein. Der Wille, die analytischen Gebilde auf Grund der besprochenen Analogie als *zweidimensionale Mannigfaltigkeiten* aufzufassen, führt uns sogleich mitten in die Riemann-Kleinschen Vorstellungsweisen hinein. Die gewöhnlichen, in elementaren Lehrbüchern zur Darstellung kommenden Riemannschen Flächen haben ja in der Tat gerade diese Bedeutung: jedes Funktionselement des analytischen Gebildes so durch einen einzigen Punkt der Fläche zu repräsentieren, daß analytisch zusammenhängende Reihen von Funktionselementen des Gebildes als stetige Kurven auf der Riemannschen Fläche erscheinen.

Bevor wir jedoch die hierdurch angeregten Gedankengänge weiter verfolgen können, müssen wir uns noch über das Verhältnis der beiden Begriffe „analytische Funktion“ und „analytisches Gebilde“ orientieren.

§ 3. Verhältnis der Begriffe „analytische Funktion“ und „analytisches Gebilde“ zu einander.

Eine erste Bemerkung ist diese: Ist es gelungen, in der in § 1 geschilderten Weise ein reguläres Funktionselement regulär längs einer gegebenen Kurve $z = z(\lambda)\,[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ fortzusetzen [wodurch jedem Wert λ ein reguläres Funktionselement $\mathfrak{e}(\lambda)$ zugewiesen ist, in welchem die Entwicklung von z nach Potenzen des Darstellungsparameters t mit dem konstanten Glied $z(\lambda)$ beginnt], so hat man dadurch eine im Sinne von § 2 analytisch zusammenhängende Reihe von Funktionselementen erhalten. In Wahrheit: ist λ_0 irgend ein λ-Wert, $\mathfrak{U}_0$ eine beliebige analytische Umgebung von $\mathfrak{e}(\lambda_0) = \mathfrak{e}_0$, so kann man wegen der Regularität von $\mathfrak{e}_0$ die Variable $z' = z - z(\lambda_0)$ als Darstellungsparameter von $\mathfrak{e}_0$ wählen, und es gibt dann eine etwa durch $|z'| < r_0$ definierte z'-Umgebung von $\mathfrak{e}_0$, die ganz in $\mathfrak{U}_0$ enthalten ist. Grenzt man um $z(\lambda_0)$ durch die Ungleichung $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon\,(\varepsilon > 0)$ einen Bogen ab, für den durchweg $|z(\lambda) - z(\lambda_0)| < r_0$ ist, so enstehen die den Punkten dieses Bogens entsprechenden $\mathfrak{e}(\lambda)$ durch Umordnen nach Potenzen von $z - z(\lambda)$ aus $\mathfrak{e}_0$, gehören demnach der durch $|z'| < r_0$ bestimmten z'-Umgebung von

$\mathfrak{e}_0$ und damit auch der Umgebung $\mathfrak{U}_0$ an. — Das Umgekehrte, daß eine analytisch zusammenhängende Reihe regulärer Funktionselemente aus dem Anfangselement durch den in § 1 beschriebenen Prozeß der analytischen Fortsetzung erhalten wird, bedarf keines Beweises.

In einer analytisch zusammenhängenden Reihe $\mathfrak{e}(\lambda)[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ *von Funktionselementen kommen stets nur endlichviele irreguläre* (insbesondere auch nur endlichviele verzweigte) *Funktionselemente vor.* Sonst würden nämlich diejenigen Werte λ, denen irreguläre Elemente entsprechen, einen Verdichtungswert λ_0 besitzen, und es lägen in *jeder* analytischen Umgebung von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ unendlichviele irreguläre Elemente, was unmöglich ist.

Die Entwicklung von z in der Darstellung des Funktionselementes $\mathfrak{e}(\lambda)$ beginne mit dem konstanten Term $z(\lambda)$ [daß sie mit negativen Potenzen des Darstellungsparameters t beginne, schließen wir der Bequemlichkeit halber aus]. Wir wollen den Fall betrachten, daß unter den $\mathfrak{e}(\lambda)$ verzweigte Funktionselemente vorkommen; $\mathfrak{e}(0)$ sei regulär, aber $\lambda_0(<1)$ der kleinste λ-Wert, für welchen $\mathfrak{e}(\lambda)$ irregulär ist; $\mu - 1$ sei die Verzweigungsordnung von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$. Die Elemente $\mathfrak{e}(\lambda)$ von $\lambda = 0$ bis λ_0 (exkl.) erhält man dann eindeutig durch analytische Fortsetzung längs der gegebenen Kurve $z = z(\lambda)$. Das ändert sich aber von λ_0 ab; über $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ hinaus läßt sich die analytische Fortsetzung längs der gegebenen Kurve auf genau μ verschiedene Weisen weiterführen: der Stamm teilt sich in μ Äste, an deren einem die *gegebene* analytisch zusammenhängende Reihe entlang läuft. Jeder dieser Äste kann sich im weiteren Verlauf abermals verzweigen, und die nächste Verzweigung des einen Astes kann durchaus an einer andern Stelle eintreten wie für den andern Ast; und so fort. Auch kann ein Zweig natürlich, wenn man zu einer kritischen Stelle gelangt, die nicht bloß einen Pol oder Verzweigungspunkt endlichhoher Ordnung bedeutet, ganz aufhören, bevor man auf ihm bis zu $\lambda = 1$ gelangt ist. Aus dieser Beschreibung mag man erkennen, wie glücklich die der Riemannschen Bezeichnung „Verzweigungspunkt" zugrunde liegende anschauliche Vorstellung das Wesen der Sache trifft. Zum Beweise unserer Behauptungen reicht die folgende einfache Überlegung aus.

$$z = z(\lambda_0) + t^{\mu}, \quad u = Q(t)$$

sei eine der μ Normaldarstellungen von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$, die für $|t| < r$ gültig sein möge. Ein $\lambda_1 > \lambda_0$ werde so gewählt, daß $|z(\lambda) - z(\lambda_0)| < r^{\mu}$ bleibt für $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$. Dann gibt es in der t-Ebene μ von dem Nullpunkt $t = 0$ auslaufende Kurvenäste, die alle in dem Kreise $|t| < r$ bleiben und durch die Abbildung $z = z(\lambda_0) + t^{\mu}$ in einen und denselben Kurvenbogen $z = z(\lambda)[\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1]$ übergehen; diese μ Kurvenäste entstehen auseinander durch Drehung um den Nullpunkt um $\frac{2\pi}{\mu}, \frac{4\pi}{\mu}, \cdots$. Indem man $Q(t)$ längs jedes dieser Kurvenäste fortsetzt (unmittelbare analytische

Fortsetzung!), gewinnt man die μ möglichen Fortsetzungen von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ längs der vorgeschriebenen Kurve über $\lambda = \lambda_0$ hinaus bis $\lambda = \lambda_1$. Daß sich jede dieser Fortsetzungen als analytisch zusammenhängende Reihe bis zu Ende ($\lambda = 1$) durchführen läßt, wird nicht behauptet und ist auch im allgemeinen nicht richtig.

Der Umstand, daß in einer jeden analytisch zusammenhängenden Reihe von Funktionselementen nur endlichviele irreguläre vorkommen, ermöglicht es, diese irregulären Elemente zu *umgehen*. Zwei Funktionselemente also, die sich überhaupt durch eine analytisch zusammenhängende Reihe verbinden lassen, lassen sich auch durch eine solche verbinden, die (abgesehen vielleicht von Anfangs- und Endelement) ausschließlich aus *regulären* Elementen besteht. Zum Beweise nehmen wir der Einfachheit halber an, daß die analytisch zusammenhängende Reihe $\mathfrak{e}(\lambda)$ nur *ein* irreguläres Element $\mathfrak{e}(\lambda_0)[0 < \lambda_0 < 1]$ enthalte.

$$z = P(t), \qquad u = Q(t)$$

sei eine für $|t| < r$ gültige Darstellung desselben; dabei sei r so klein gewählt, daß die Elemente der durch $|t| < r$ bestimmten t-Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$, abgesehen von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ selbst, alle regulär sind. Man kann zwei Werte $\lambda_1 < \lambda_0$ und $\lambda_2 > \lambda_0$ so annehmen, daß alle $\mathfrak{e}(\lambda)[\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2]$ zu $\mathfrak{U}_0$ gehören. $\mathfrak{e}(\lambda_1)$ entsteht aus der zugrunde gelegten Darstellung von $\mathfrak{e}(\lambda_0)$ durch Umordnen derselben nach Potenzen von $t - t_1$ (wo t_1 ein gewisser, dem Kreise $|t| < r$ angehöriger Punkt ist), $\mathfrak{e}(\lambda_2)$ durch Umordnen nach Potenzen von $t - t_2$. Die beiden Punkte t_1, t_2 in der t-Ebene kann man durch eine Kurve innerhalb des Kreises $|t| < r$ verbinden, die nicht durch den Nullpunkt geht. Indem man jedem Punkt t_0 dieser Kurve dasjenige Funktionselement zuordnet, das man durch Umordnen von $P(t)$, $Q(t)$ nach Potenzen von $t - t_0$ erhält, gelingt es, $\mathfrak{e}(\lambda_1)$ mit $\mathfrak{e}(\lambda_2)$ durch eine aus lauter regulären Funktionselementen bestehende analytisch zusammenhängende Reihe zu verbinden.

Aus den bewiesenen Tatsachen ergibt sich:

1. *Die sämtlichen regulären Funktionselemente eines analytischen Gebildes machen eine einzige analytische Funktion aus.*

2. *Jede analytische Funktion besteht aus den sämtlichen regulären Funktionselementen eines durch die Funktion eindeutig bestimmten analytischen Gebildes.*

Dazu tritt der weitere Satz:

3. *Die irregulären Funktionselemente eines analytischen Gebildes sind nur in abzählbarer Menge vorhanden.*

Den Beweis führen wir mit Hilfe des von Poincaré und Volterra[1])

1) Poincaré, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 2 (1888), S. 197—200. Volterra, Atti della Reale Academia dei Lincei, Ser. 4, IV_2, S. 355.

ausgesprochenen Theorems, daß *es in einem analytischen Gebilde höchstens abzählbar unendlichviele reguläre Funktionselemente $u = \mathfrak{P}(z-a)$ mit vorgeschriebenem Mittelpunkt $z = a$ gibt.* Denn alle diese Elemente lassen sich aus einem, $\mathfrak{P}_1$, von ihnen dadurch erzeugen, daß $\mathfrak{P}_1$ längs Kurven in der z-Ebene, die von a ausgehen und dorthin zurückkehren, in regulärer Weise fortgesetzt wird. Zu jeder solchen Kurve kann man aber einen aus endlichvielen geradlinigen Strecken bestehenden Streckenzug konstruieren, der in solcher Nähe der Kurve verläuft, daß die reguläre analytische Fortsetzung längs des Streckenzuges gleichfalls möglich ist und zu demselben Endelement führt wie die Fortsetzung längs der Kurve. Dabei kann man noch dafür Sorge tragen, daß die Ecken dieses Streckenzuges relativ zu a rationale Koordinaten besitzen; diese relativen Koordinaten $z - a$ seien:

$$\frac{n_1' + i n_1''}{n_1}, \quad \frac{n_2' + i n_2''}{n_2}, \ldots, \frac{n_h' + i n_h''}{n_h} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

wo immer n_f', n_f'', n_f ganze Zahlen ohne gemeinsamen Teiler sind und $n_f > 0$ $[f = 1, 2, \ldots, h]$. Wir ordnen diesem Streckenzuge die Zahl

$$\sum_{f=1}^{h} |n_f'| + \sum_{f=1}^{h} |n_f''| + \sum_{f=1}^{h} n_f = N$$

zu. Unter den von a ausgehenden und nach a zurückkehrenden Streckenzügen, deren Ecken sich von a um rationale komplexe Zahlen unterscheiden, gibt es gewiß nur endlichviele, denen dieselbe Zahl N zukommt. Wähle ich N sukzessive $= 3, 4, 5, \ldots$, so bringe ich dadurch alle diese Streckenzüge in eine abgezählte Reihe. Jeder dieser Streckenzüge bestimmt entweder *ein* oder *kein* Funktionselement mit dem Mittelpunkt a, jenachdem die reguläre Fortsetzung von $\mathfrak{P}_1$ längs des Streckenzuges sich bewerkstelligen läßt oder nicht. Man erhält auf diesem Wege aber auch sicher alle dem analytischen Gebilde angehörigen regulären Elemente mit dem Mittelpunkte a, deren Abzählbarkeit damit erwiesen ist.

Statt der z-Ebene kann ich mich der aus ihr durch stereographische Projektion hervorgehenden z-Kugel bedienen, auf der auch $z = \infty$ durch einen einzigen Punkt repräsentiert wird. Ist

$$z = a + t^{\mu}, \; u = Q(t); \; \text{bezw. } z = t^{-\mu}, \; u = Q(t)$$

ein irreguläres Element eines gegebenen analytischen Gebildes in seiner Normaldarstellung, die für $|t| < r$ gültig sein möge, so gibt es zu jedem Wert z_0 ($\neq a$ bzw. ∞), welcher der Bedingung

$$(7) \qquad |z - a| < r^{\mu} \text{ bezw. } |z| > r^{-\mu}$$

genügt, genau μ reguläre Funktionselemente $u = \mathfrak{P}(z - z_0)$ mit dem Mittelpunkt z_0, die der durch $|t| < r$ bestimmten t-Umgebung des irregulären Elementes angehören. Wir sagen kurz: das irreguläre Element

„induziert“ im Punkte z_0 jene μ regulären Elemente. Die Ungleichung (7) bedeutet auf der Kugel eine Kalotte, die ich aber jetzt lieber durch diejenige größte, nicht über sie hinausgreifende Kalotte K ersetze, *deren Mittelpunkt in* a (bzw. ∞) *liegt*; der Radius von K heiße $\varkappa$. Verbinde ich z_0, das in K liege, mit dem Mittelpunkt innerhalb der Kalotte durch einen Großkreis-Bogen, so entsteht das irreguläre Element aus jedem der μ in z_0 induzierten Elemente durch analytische Fortsetzung längs dieses Kreisbogens von z_0 nach a (bzw. ∞). Hat man also zwei verschiedene irreguläre Elemente mit demselben Mittelpunkt a bzw. ∞, so ist es ausgeschlossen, daß sie in einem Punkte z_0 zwei identische reguläre Elemente induzieren. Hat man zwei irreguläre Elemente $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ mit verschiedenen Mittelpunkten und bezeichnen wir die zugehörigen Kalotten K mit K_1, K_2, ihre Radien mit $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, so lasse man beide Kalotten um ihren Mittelpunkt so zusammenschrumpfen, daß sie nur noch den halben Radius $\frac{1}{2}\varkappa_1$, $\frac{1}{2}\varkappa_2$ besitzen. Es sei etwa $\varkappa_1 \geqq \varkappa_2$. Greifen diese beiden kleineren Kalotten k_1, k_2 übereinander, so bedeute z_0 einen ihnen gemeinsamen Punkt. Ich behaupte dann, keines der von $\mathfrak{e}_1$ in z_0 induzierten Elemente ist mit einem von $\mathfrak{e}_2$ daselbst induzierten Element identisch. Denn der Mittelpunkt von K_2 liegt innerhalb der Kalotte K_1, ebenso der Großkreis-Bogen, welcher z_0 mit diesem Mittelpunkt innerhalb K_2 verbindet. Durch Fortsetzung eines der von $\mathfrak{e}_1$ in z_0 induzierten regulären Elemente längs dieses nach dem Mittelpunkt von K_2 führenden Kreisbogens erhält man eines der dort von $\mathfrak{e}_1$ induzierten regulären Elemente, niemals aber das irreguläre Element $\mathfrak{e}_2$. Damit ist unsere Behauptung begründet.

In der Weise nun, wie wir hier den irregulären Elementen $\mathfrak{e}_1$, $\mathfrak{e}_2$ die (kleinen) Kalotten k_1, k_2 zuwiesen, ordnen wir jedem irregulären Element des gegebenen analytischen Gebildes eine Kalotte k zu. Wären die irregulären Elemente nicht bloß in abzählbarer Menge vorhanden, so müßte es einen rationalen Punkt z_0 geben, der in mehr als bloß abzählbar vielen Kalotten k enthalten ist. Jedes der irregulären Elemente, zu denen diese Kalotten gehören, induziert im Punkte z_0 mindestens ein dem analytischen Gebilde angehöriges reguläres Element, das z_0 zum Mittelpunkt besitzt, und zwar, wie wir soeben nachwiesen, verschiedene irreguläre Elemente auch immer verschiedene. Das ist aber unmöglich, da es nicht mehr als abzählbarviele reguläre Funktionselemente mit dem Mittelpunkt z_0 in dem vorgelegten analytischen Gebilde geben kann.

Das analytische Gebilde unterscheidet sich demnach nur dadurch von der analytischen Funktion, daß noch abzählbarviele irreguläre Elemente hinzugetreten sind.

§ 4. Begriff der Fläche.

Es ist schon am Schluß von § 2 davon gesprochen worden, daß ein analytisches Gebilde dadurch sehr an Anschaulichkeit gewinnt, wenn es ge-

lingt, in der Weise ein jedes Element des Gebildes durch einen Punkt einer Raumfläche $\mathfrak{F}$ zu repräsentieren, daß diese repräsentierenden Punkte insgesamt die Fläche $\mathfrak{F}$ einfach bedecken und jede analytisch zusammenhängende Reihe von Elementen des analytischen Gebildes als eine stetige Kurve auf $\mathfrak{F}$ erscheint. Das Problem, eine solche das analytische Gebilde versinnlichende Fläche $\mathfrak{F}$ ausfindig zu machen, kann freilich von einem rein objektiven Standpunkt als eine nicht sachgemäße Fragestellung verworfen werden, da der dreidimensionale Raum innerlich durchaus nichts mit analytischen Gebilden zu tun hat und man sich auf ihn auch offenbar garnicht aus logisch-mathematischen Gründen bezieht, sondern weil er unserer sinnlichen Raumanschauung besonders nahesteht; man könnte es als einen dem wissenschaftlichen Prinzip widerstreitenden Anthropomorphismus bezeichnen, in dieser Weise den Dingen, statt sie so zu nehmen, wie sie sind, wesensfremde Vorstellungen aufzudrängen, nur um unserm Bedürfnis nach „Bildern und Gleichnissen" Genüge zu tun. Diese Vorwürfe des reinen Logikers treffen uns jedoch nicht, wenn wir der andern, auch bereits gestreiften Auffassung nachgehen, welcher *das analytische Gebilde selbst als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit* erscheint, auf die sich alle die Begriffe der Kontinuität, die uns in der gewöhnlichen Geometrie begegnen, übertragen lassen. Im Gegenteil: es hieße, eine der wesentlichsten Seiten des Gegenstandes übersehen, wenn man sich dieser Vorstellung nicht bediente.

Der Begriff der „zweidimensionalen Mannigfaltigkeit" oder der „Fläche" soll für uns also nicht an die Idee des Raumpunktes geknüpft sein, sondern eine viel allgemeinere abstrakte Bedeutung erhalten. Wenn überhaupt irgend eine Gesamtheit von Dingen (die die Rolle der „Punkte" übernehmen werden) gegeben ist und definitionsgemäß zwischen ihnen ein ähnlicher kontinuierlicher Zusammenhang besteht wie zwischen den Punkten einer Ebene, so sprechen wir von einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit. Da sich aber alle Kontinuitätsbegriffe auf den einen der Umgebung zurückführen lassen, so gehört zur Erklärung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit zweierlei:

1. Angabe derjenigen Dinge, welche als „Punkte" der Mannigfaltigkeit gelten sollen;

2. eine Erklärung des Begriffes der „Umgebung".

In präziser Fassung: wann wollen wir sagen, es sei eine **zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ gegeben?** Wenn folgendes der Fall ist:

Gegeben eine Gesamtheit von Dingen, die **„Punkte der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$"** *heißen. Zu jedem Punkt $\mathfrak{p}$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ sind gewisse Mengen von Punkten der Mannigfaltigkeit als* **„Umgebungen von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$"** *definiert. Jede Umgebung $\mathfrak{U}_0$ eines Punktes $\mathfrak{p}_0$ der Mannigfaltigkeit auf $\mathfrak{F}$ muß $\mathfrak{p}_0$ selbst enthalten und eine umkehrbar eindeutige Abbildung auf die inneren Punkte eines gewöhnlichen Euklidischen Kreises*

K_0 (wobei $\mathfrak{p}_0$ in den Mittelpunkt des Kreises übergeht) von der folgenden Beschaffenheit gestatten:

1. *ist $\mathfrak{p}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{U}_0$ und $\mathfrak{U}$ eine nur aus Punkten von $\mathfrak{U}_0$ bestehende Umgebung von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, so enthält das (durch jene Abbildung in K_0 entworfene) Bild von $\mathfrak{U}$ den Bildpunkt von $\mathfrak{p}$ im Innern; d. h. es läßt sich um den Bildpunkt p von $\mathfrak{p}$ eine Kreisfläche k beschreiben, sodaß jeder Punkt von k Bild eines Punktes von $\mathfrak{U}$ ist;*

2. *ist K das Innere irgend eines ganz in K_0 gelegenen Kreises mit dem Mittelpunkt p, so gibt es stets eine Umgebung $\mathfrak{U}$ von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, deren Bild ganz in K liegt.*

Wir legen jetzt kurz dar, wie auf Grund des Begriffes der Umgebung alle Kontinuitätsbegriffe von der gewöhnlichen Ebene auf beliebige zweidimensionale Mannigfaltigkeiten übertragen werden können.

Ist eine Menge $\mathfrak{E}$ von Punkten der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ gegeben, so heißt der Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ eine **Verdichtungsstelle (Häufungspunkt)** der Menge $\mathfrak{E}$, falls in jeder Umgebung von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$ unendlichviele Punkte von $\mathfrak{E}$ liegen. — Ein zur Menge $\mathfrak{E}$ gehöriger Punkt, der keine Verdichtungsstelle von $\mathfrak{E}$ ist, heißt ein **isolierter Punkt** in $\mathfrak{E}$. Hingegen ist $\mathfrak{p}$ ein **innerer Punkt** von $\mathfrak{E}$, falls es eine Umgebung von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$ gibt, deren sämtliche Punkte $\mathfrak{E}$ angehören. — $\mathfrak{E}$ heißt **abgeschlossen**, wenn jede Verdichtungsstelle von $\mathfrak{E}$ zu $\mathfrak{E}$ gehört.

Eine **stetige Kurve** γ auf $\mathfrak{F}$ ist gegeben, wenn jeder reellen Zahl λ des Intervalls $0 \leqq \lambda \leqq 1$ ein Punkt $\mathfrak{p}(\lambda)$ auf $\mathfrak{F}$ so zugeordnet ist, daß die Bedingung der Stetigkeit erfüllt ist. Diese besagt: Ist λ_0 irgend ein Wert des Parameters λ, $\mathfrak{U}_0$ irgend eine Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ auf $\mathfrak{F}$, so gibt es stets eine positive Zahl ε von der Beschaffenheit, daß für alle λ, welche der Bedingung $|\lambda - \lambda_0| \leqq \varepsilon$ genügen, der Punkt $\mathfrak{p}(\lambda)$ zu $\mathfrak{U}_0$ gehört. — Die Kurve γ **verbindet** den Anfangspunkt $\mathfrak{p}(0)$ mit dem Endpunkt $\mathfrak{p}(1)$.

Eine Punktmenge $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{F}$ heißt ein **Gebiet**, wenn 1) jeder Punkt von $\mathfrak{E}$ ein innerer Punkt dieser Punktmenge ist und 2) sich je zwei Punkte von $\mathfrak{E}$ durch eine stetige Kurve auf $\mathfrak{F}$ verbinden lassen, die ausschließlich aus Punkten von $\mathfrak{E}$ besteht. — *Wir engen den bisher benutzten Begriff der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ noch durch die weitere Forderung ein, daß $\mathfrak{F}$ selber ein Gebiet sein* (d. h. aus einem Stück bestehen) *soll.*

Ist jedem Punkte $\mathfrak{p}$ einer gewissen Punktmenge $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{F}$ eine reelle oder komplexe Zahl $f(\mathfrak{p})$ zugeordnet, so ist in $\mathfrak{E}$ eine **Funktion** f definiert; die Zahl $f(\mathfrak{p})$ ist der **Wert** dieser Funktion im Punkte $\mathfrak{p}$. Bezeichnet $\mathfrak{p}_0$ einen beliebigen Punkt von $\mathfrak{E}$, so heißt f im Punkte $\mathfrak{p}_0$ **stetig**, falls zu jeder positiven Zahl ε eine Umgebung $\mathfrak{U}_\varepsilon$ von $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{F}$ existiert, sodaß $|f(\mathfrak{p}) - f(\mathfrak{p}_0)| < \varepsilon$ bleibt für alle $\mathfrak{p}$, die sowohl zu $\mathfrak{E}$ als zu $\mathfrak{U}_\varepsilon$ gehören.

Bedeuten $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ zwei zweidimensionale Mannigfaltigkeiten und $\mathfrak{E}_1$ eine Punktmenge auf $\mathfrak{F}_1$, ist ferner jedem Punkt $\mathfrak{p}^{(1)}$ von $\mathfrak{E}_1$ ein Punkt $\mathfrak{p}^{(2)}$ von $\mathfrak{F}_2$ zugeordnet, so ist dadurch eine **Abbildung von** $\mathfrak{E}_1$ **in** $\mathfrak{F}_2$ gegeben. Die Menge der Bildpunkte auf $\mathfrak{F}_2$ wird als **Bildmenge** von $\mathfrak{E}_1$ bezeichnet. Diese Abbildung heißt **stetig**, wenn folgendes zutrifft: Ist $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{E}_1$, $\mathfrak{p}_0^{(2)}$ sein Bildpunkt auf $\mathfrak{F}_2$, $\mathfrak{U}^{(2)}$ irgend eine Umgebung von $\mathfrak{p}_0^{(2)}$ auf $\mathfrak{F}_2$, so gibt es immer eine Umgebung $\mathfrak{U}^{(1)}$ von $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ auf $\mathfrak{F}_1$, derart daß der Bildpunkt eines jeden gleichzeitig zu $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{U}^{(1)}$ gehörigen Punktes ein Punkt von $\mathfrak{U}^{(2)}$ ist. — Das stetige Abbild einer abgeschlossenen Menge ist wieder abgeschlossen. — Ist $\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda)[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ eine stetige Kurve auf $\mathfrak{F}_1$, deren sämtliche Punkte der stetig in einer zweiten Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_2$ abgebildeten Menge $\mathfrak{E}_1$ angehören, so kann man auf $\mathfrak{F}_2$ dadurch eine stetige Kurve definieren, daß man jedem Wert des Parameters λ denjenigen Punkt $\mathfrak{p}^{(2)}$ auf $\mathfrak{F}_2$ zuordnet, der bei der gegebenen Abbildung von $\mathfrak{E}_1$ aus dem Punkte $\mathfrak{p}^{(1)}(\lambda)$ hervorgeht. Diese Kurve heißt das **Bild** der gegebenen. — Ist eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{E}_1$ (auf $\mathfrak{F}_1$) umkehrbar eindeutig und stetig auf eine Teilmenge $\mathfrak{E}_2$ von $\mathfrak{F}_2$ abgebildet, so ist auch die *inverse Abbildung* (welche dadurch zustande kommt, daß man jedem Punkt $\mathfrak{p}^{(2)}$ von $\mathfrak{E}_2$ denjenigen einzigen Punkt $\mathfrak{p}^{(1)}$ von $\mathfrak{E}_1$ zuordnet, dessen Bild $\mathfrak{p}^{(2)}$ ist) eine stetige Abbildung. (S. die Berichtigungen am Schluß des Buches.)

Neben den Begriff der stetigen Abbildung im gewöhnlichen Sinne, der hauptsächlich für abgeschlossene Mengen in Betracht kommt, tritt ein Stetigkeitsbegriff, der in analoger Weise auf die nur aus inneren Punkten bestehenden *Gebiete* zugeschnitten ist und für den es bisher an einem Namen mangelt; ich schlage die Bezeichnung „gebiets-stetig“ vor. Die Abbildung einer nur aus inneren Punkten bestehenden Menge $\mathfrak{E}_1$ auf $\mathfrak{F}_1$ heißt **gebietsstetig**, wenn das Abbild $\mathfrak{B}_0^{(2)}$ einer jeden ganz in $\mathfrak{E}_1$ gelegenen Umgebung $\mathfrak{U}_0^{(1)}$ eines beliebigen zu $\mathfrak{E}_1$ gehörigen Punktes $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ stets den Bildpunkt $\mathfrak{p}_0^{(2)}$ von $\mathfrak{p}_0^{(1)}$ *im Innern* enthält. Eine umkehrbar eindeutige und umkehrbar gebietsstetige Abbildung ist auch im gewöhnlichen Sinne stetig. Ein fundamentaler, von L. E. J. Brouwer bewiesener Satz[1]) besagt, daß hiervon auch die Umkehrung zutrifft: eine jede umkehrbar eindeutige stetige Abbildung einer nur aus inneren Punkten bestehenden Menge ist samt ihrer inversen gebietsstetig. Durch diesen Satz wird der Begriff der Gebietsstetigkeit wieder überflüssig gemacht. Da wir aber im folgenden nirgends Veranlassung haben, von diesem schwierig zu beweisenden Theorem Gebrauch zu machen, möchte ich hier gleichwohl das Wort „gebietsstetig“

---

1) Mathematische Annalen Bd. 70 (1911), S. 161—165; Bd. 71 (1912), S. 305—313; Bd. 72 (1912), S. 55—56. Brouwers Untersuchungen beziehen sich auf n-dimensionale Gebiete. Den zweidimensionalen Fall, der für uns allein in Betracht kommt, haben bereits früher *unter Zuhülfenahme des sog. „Jordanschen Kurvensatzes“* Schoenflies (Göttinger Nachrichten 1899, S. 282—290), Osgood (ebendort 1900, S. 94—97) und F. Bernstein (ebendort 1900, S. 98—102) erledigt.

beibehalten. — Die Forderungen 1. und 2., die wir auf S. 18 bei der Definition der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit an den Begriff der Umgebung stellten, lassen sich jetzt kurz dahin aussprechen: *Jede Umgebung eines Punktes* $\mathfrak{p}_0$ *auf* $\mathfrak{F}$ *läßt sich umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig auf das Innere eines Kreises abbilden* (wobei $\mathfrak{p}_0$ in den Kreismittelpunkt übergeht).

Die Definition dessen, was als „Umgebung" eines Punktes auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ betrachtet werden soll, kann bis zu einem gewissen Grade geändert werden, ohne daß wir dadurch die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ als verändert ansehen wollen. Tasten wir nämlich die Erklärung derjenigen Dinge, welche als Punkte von $\mathfrak{F}$ zu gelten haben, nicht an, ersetzen hingegen die ursprüngliche („erste") Definition des Begriffes der Umgebung durch eine zweite, die der eben neu formulierten Forderung gleichfalls genügt, und gilt dann der Satz: Jede nach der zweiten Definition als Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ zu bezeichnende Punktmenge enthält eine Punktmenge, welche nach der ersten Definition als Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ anzusprechen ist, und umgekehrt, welches auch der Punkt $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{F}$ sei — so wollen wir übereinkommen, die durch die zweite Definition festgelegte Mannigfaltigkeit als von der durch die erste festgelegten nicht verschieden zu betrachten. In diesem Übereinkommen liegt wiederum eine „Definition durch Abstraktion" vor, deren Berechtigungsnachweis wir dem Leser überlassen können. Im übrigen wird keiner der oben aufgezählten Stetigkeitsbegriffe dadurch, daß die erste Definition der Umgebung durch die zweite ersetzt wird, irgendwie tangiert: eine Punktmenge, die nach der ersten Definition als abgeschlossen zu bezeichnen ist oder als ein Gebiet, bleibt dies auch nach der zweiten; entsprechend steht es mit den stetigen Funktionen, den stetigen Kurven, den stetigen Abbildungen usw.

Derjenige Zweig der Mathematik, der es mit den Kontinuitätseigenschaften der zwei- (und mehr-) dimensionalen Mannigfaltigkeiten zu tun hat, wird als **Analysis situs** oder **Topologie** bezeichnet. Diese Disziplin spielt in der Funktionentheorie seit Riemann eine wichtige Rolle, und wir werden uns in den folgenden Abschnitten noch eingehender mit der Topologie der zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten befassen müssen. Zwei Mannigfaltigkeiten müssen **im Sinne der Analysis situs als äquivalent** betrachtet werden, wenn sie sich Punkt für Punkt umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig aufeinander abbilden lassen. Alle untereinander äquivalenten zweidimensionalen Mannigfaltigkeiten darf man als Verwirklichungen einer und derselben „idealen Mannigfaltigkeit" auffassen, in der die individuellen Züge, durch die sich diese verschiedenen Verwirklichungen voneinander unterscheiden, ausgelöscht sind (Definition durch Abstraktion). Die oben zusammengestellten Kontinuitätsbegriffe sind reine Analysis-situs-Begriffe, da sie sich gegenüber beliebigen umkehrbar-eindeutigen und -gebietsstetigen Abbildungen invariant verhalten. In-

dem wir das analytische Gebilde als zweidimensionale Mannigfaltigkeit betrachten, werden wir dazu geführt, die Analysis-situs-Eigenschaften dieser Mannigfaltigkeit als die einschneidendsten und primitivsten in den Vordergrund zu rücken. Es scheint mir eine Forderung der Sachlichkeit zu sein, diese Eigenschaften dann auch nur mit Hilfe solcher Begriffe und Methoden zu begründen, welche der Analysis situs angehören. Dieser Forderung hat Riemann bei seinem Aufbau der Funktionentheorie genügt.

Ein Teilgebiet $\mathfrak{G}$ auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ ist selber eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit $\mathfrak{G}$, wenn wir als Umgebung eines Punktes von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}$ jede ganz in $\mathfrak{G}$ enthaltene Umgebung dieses Punktes auf $\mathfrak{F}$ betrachten. Jede ganze zu $\mathfrak{G}$ gehörige Kurve auf $\mathfrak{F}$ ist dann auch eine stetige Kurve auf $\mathfrak{G}$ usw.

Um wesentliche Sätze über zweidimensionale Mannigfaltigkeiten aufstellen zu können, scheint es erforderlich zu sein, diesen Begriff noch einer weiteren Einschränkung zu unterwerfen, die den Zweck hat, die Anwendbarkeit der *„Exhaustionsmethode"* auf die zu untersuchenden Mannigfaltigkeiten zu gewährleisten. Zur Exhaustion eines ebenen Gebietes benutzt man am einfachsten *Dreiecke (Verfahren der Triangulation).* Wir werden demnach fortan nur solche Mannigfaltigkeiten betrachten, welche sich in einem analogen Sinne wie ein ebenes Gebiet triangulieren lassen, und es wird diese Einschränkung deshalb für uns unbedenklich sein, weil wir hernach für jedes analytische Gebilde den Nachweis der Möglichkeit seiner Triangulation werden erbringen können.

Ein ebenes Dreieck läßt sich am leichtesten mit Hilfe der zu seinen Eckpunkten gehörigen homogenen Schwerpunktskoordinaten beschreiben. Dadurch gelangen wir zu der folgenden Erklärung. Ist jedem Tripel $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ von drei reellen, *nicht-negativen* Zahlen ein Punkt $\mathfrak{p}$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ so zugeordnet, daß 1) zwei derartigen Tripeln dann und nur dann derselbe Punkt $\mathfrak{p}$ zugeordnet ist, falls beide Zahlentripel das gleiche Verhältnis $(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3)$ haben, und 2) die Bedingung der Stetigheit erfüllt ist, so sagen wir, es sei auf $\mathfrak{F}$ ein **Dreieck** Δ definiert. $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ heißt das **Koordinatenverhältnis** von $\mathfrak{p}$ in Δ. — Die Bedingung der Stetigkeit wird besagen: Ist $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0)$ irgend eines der in Betracht kommenden Tripel, $\mathfrak{p}^0$ der zugeordnete Punkt, $\mathfrak{U}_0$ eine beliebige Umgebung von $\mathfrak{p}^0$ auf $\mathfrak{F}$, so gibt es eine positive Zahl ε von der Art, daß für alle in Betracht kommenden Tripel, welche die Ungleichungen

$$|\xi_1 - \xi_1^0| < \varepsilon, \quad |\xi_2 - \xi_2^0| < \varepsilon, \quad |\xi_3 - \xi_3^0| < \varepsilon$$

befriedigen, der Bildpunkt $\mathfrak{p}$ jener Umgebung $\mathfrak{U}_0$ angehört.

Zur Definition des Dreiecks gehört demnach nicht nur die Angabe derjenigen Punkte von $\mathfrak{F}$, welche ihm angehören sollen, sondern es gilt erst dann als vollständig bestimmt, wenn jedem seiner Punkte ein Koordinatenverhältnis von drei nicht-negativen Zahlen zugewiesen ist. Die

Punkte 1:0:0, 0:1:0, 0:0:1 werden als die drei **Ecken** des Dreiecks zu bezeichnen sein; die drei **Kanten** desselben werden durch $\xi_1 = 0$, bezw. $\xi_2 = 0$, bezw. $\xi_3 = 0$ geliefert.

Die Forderung der Möglichkeit einer Triangulation werden wir nun [im engsten Anschluß an Brouwers fundamentale Arbeiten[1]) und in einiger Übereinstimmung mit der in der Enzyklopädie entwickelten Dehn-Heegaardschen Theorie[2])] so zu fassen haben. Es seien auf einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ endlich- oder unendlichviele Dreiecke Δ (die „Elementardreiecke" der Triangulation) definiert, sodaß jeder Punkt der Mannigfaltigkeit mindestens einem der Dreiecke Δ angehört und außerdem folgende Bedingungen erfüllt sind:

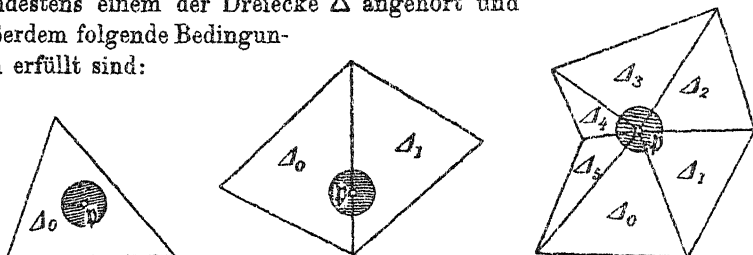



Fig. 1. Innerer Punkt, Kantenpunkt, Eckpunkt einer Triangulation.

1) Ist $\mathfrak{p}$ ein dem Δ-Dreieck Δ_0 angehöriger, nicht auf den Kanten von Δ_0 gelegener Punkt, so gehört weder $\mathfrak{p}$ noch irgend ein Punkt einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}$ zu einem der von Δ_0 verschiedenen Dreiecke Δ.

2) Ist $\mathfrak{p}$ auf einer Kante k von Δ_0 gelegen, jedoch kein Eckpunkt von Δ_0, so gibt es ein weiteres Δ-Dreieck Δ_1, dem $\mathfrak{p}$ außerdem noch angehört; Δ_0, Δ_1 haben alle Punkte auf k, aber keine weiteren gemein; weder $\mathfrak{p}$ noch irgend ein Punkt einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}$ gehört zu einem von Δ_0 und Δ_1 verschiedenen Δ-Dreieck.

3) Ist $\mathfrak{p}$ Eckpunkt eines Dreiecks Δ, so gibt es endlich viele Δ-Dreiecke: $\Delta_0, \Delta_1, \cdots, \Delta_h$, denen der Punkt $\mathfrak{p}$ angehört; in allen diesen Dreiecken ist $\mathfrak{p}$ ein Eckpunkt, und sie hängen in der Weise in einem einzigen Zykel zusammen, daß Δ_0 mit Δ_1 genau eine Kante, Δ_1 mit Δ_2 eine Kante, $\cdots$, schließlich Δ_h wieder mit Δ_0 eine Kante gemein hat[3]); weder $\mathfrak{p}$ noch irgend ein Punkt einer gewissen Umgebung von

1) S. namentlich L. E. J. Brouwer, Über Abbildung von Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. Bd. 71 (1912), S. 97 ff. Ferner J. Hadamard „Sur quelques applications de l'indice de Kronecker" im 2. Bande von J. Tannery, Introduction à la théorie des fonctions d'une variable, 2. Aufl. (Paris 1910). Die Auffassung einer beliebigen geschlossenen Raumfläche als eines Polyeders findet sich klar entwickelt bei Möbius, namentlich in den nachgelassenen Papieren „Zur Theorie der Polyeder und der Elementarverwandtschaft" (1861), Werke Bd. II, S. 517 ff.

2) Enzyklopädie III A B 3, S. 153 ff.

3) Diese Konfiguration bezeichnen wir als einen **Dreiecks-Stern**.

$\mathfrak{p}$ gehört einem nicht in dem Zykel Δ_i $(i = 0, 1, \cdot \cdot, h)$ auftretenden Dreieck Δ an:

dann ist die Mannigfaltigkeit **in Elementardreiecke** Δ **zerlegt.**

Wir ziehen in Zukunft nur solche zweidimensionale Mannigfaltigkeiten in Betracht, die sich in Elementardreiecke zerlegen lassen; für solche Mannigfaltigkeiten will ich die kürzere Bezeichnung **Fläche** gebrauchen. Es wird alsbald hervortreten, welche große Bedeutung der Möglichkeit der Triangulation für die Analysis situs auf einer Fläche zukommt.

Hat man eine Fläche $\mathfrak{F}$ in Elementardreiecke Δ zerlegt, so wird man eine geordnete Folge von endlichvielen (untereinander verschiedenen) dieser Dreiecke Δ:

$$\Delta_1, \Delta_2, \cdot \cdot \cdot, \Delta_n$$

als eine **(einfache) Kette** von Dreiecken bezeichnen, falls immer Δ_j mit Δ_{j+1} eine Kante gemein hat; die Kette *„verbindet"* Δ_1 mit Δ_n. (Hat auch wieder Δ_n mit Δ_1 eine Kante k gemein, so ist die Kette über die Kante k hinüber *geschlossen.*) Der Umstand, daß sich je zwei Punkte von $\mathfrak{F}$ durch eine stetige Kurve auf $\mathfrak{F}$ verbinden lassen, hat zur Folge, daß je zwei Elementardreiecke Δ durch eine einfache Kette von Dreiecken Δ miteinander verbunden werden können. Zunächst nämlich kann es nur endlichviele Dreiecke Δ geben, die Punkte mit einer stetigen Kurve $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ gemein haben. Gäbe es unendlichviele, so bekäme man eine unendliche Reihe von Kurvenpunkten $\mathfrak{p}(\lambda_j)[j = 1, 2, \cdot \cdot \cdot]$, von denen keine zwei dem gleichen Dreieck angehören; ist dann λ_∞ ein Verdichtungswert der λ_j, so müßten in jeder Umgebung von $\mathfrak{p}(\lambda_\infty)$ Punkte unendlichvieler Dreiecke angetroffen werden: nach den an jede Triangulation zu stellenden Forderungen 1)—3) ist das unmöglich. Um jetzt zwei gegebene Dreiecke Δ, Δ_0 und Δ^0, durch eine Kette zu verbinden, verfahre ich so: Ich wähle irgend einen Punkt im Innern von Δ_0 und einen Punkt im Innern von Δ^0 und verbinde beide auf $\mathfrak{F}$ durch eine stetige Kurve $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$. Ich achte darauf, wann diese Kurve *zum letzten Mal* das Dreieck Δ_0 verläßt — ich drücke mich so aus, als ob λ die Zeit bedeute —, d. h. ich suche den größten Wert $\lambda = \lambda_0$, für den $\mathfrak{p}(\lambda)$ zu Δ_0 gehört. Der Punkt $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ wird auf einer Kante k von Δ_0 liegen. Ist er kein Eckpunkt (*erster Fall*), so tritt die Kurve jetzt in dasjenige Dreieck über, das längs k an Δ_0 angrenzt: dieses Δ_1 wird das nächste Glied in der zu konstruierenden Kette sein. Ist hingegen $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ ein Eckpunkt, so bilde ich den ganzen Dreieckstern um den Eckpunkt $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ herum, den ich als eine einzige geschlossene Kette $\Delta_0 \Delta_1 \cdot \cdot \Delta_h$ auffassen kann. Kommt Δ^0 unter seinen Dreiecken vor, so bin ich bereits fertig; sonst achte ich darauf, wann die Kurve zum letzten Mal den Stern verläßt. Der Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$, durch den das geschieht, ist sicherlich kein Punkt

von Δ_0 (denn Δ_0 ist schon vorher zum letzten Mal verlassen worden); vielmehr sei in der Reihe $\Delta_1, \cdots, \Delta_h$ das Dreieck Δ_g das erste (und, falls $\mathfrak{p}_0$ kein Eckpunkt, auch das einzige), dem der Punkt $\mathfrak{p}_0$ angehört. Dann nehme ich $\Delta_1, \cdots, \Delta_g$ als die nächsten Glieder der zu konstruierenden Kette. (Im ersten Fall schreibe ich $g = 1$.) Jetzt verfahre ich mit Δ_g, so wie anfangs mit Δ_0 und bekomme das oder die nächsten Glieder der gesuchten Kette; auf das letzte der so neu erhaltenen Glieder wende ich wieder das gleiche Fortsetzungsverfahren an, und so weiter. Alle die Glieder, welche ich bekomme, sind Dreiecke, die Punkte mit der Kurve gemein haben. Da aber für die Fortsetzung entscheidend immer derjenige Moment ist, wo die Kurve *zum letzten Mal* das Dreieck oder den Stern verläßt, komme ich auch nie zu einem schon erhaltenen Dreieck zurück. Infolgedessen muß das Verfahren, da überhaupt nur endlichviele Dreiecke zur Verfügung stehen, einmal abbrechen; das wird aber erst dann geschehen, wenn ich bis zum Endpunkt der Kurve, d. h. bis zum Dreieck Δ^0 vorgedrungen bin. Durch die geschilderte Konstruktion wird demnach in der Tat Δ_0 mit Δ^0 durch eine einfache Kette verbunden.

Hieraus schließen wir weiter, daß die Elementardreiecke Δ nur eine endliche oder abzählbar unendliche Menge bilden können. Wir gehen von einem Dreieck Δ_0 aus, bilden dann diejenigen endlichvielen Dreiecke Δ, welche an die Kanten und Ecken von Δ_0 anstoßen, darauf diejenigen endlichvielen, welche an die freien Kanten und Ecken der bis jetzt aufgenommenen Dreiecke anstoßen, u. s. f. Dadurch ordnen wir die Δ in eine abzählbare Reihe; daß dabei jedes Dreieck Δ schließlich mit aufgenommen wird, folgt eben aus dem Satz von der Möglichkeit der Kettenverbindung.

Eine Punktmenge auf der Fläche $\mathfrak{F}$, die keine Verdichtungsstelle besitzt, ist endlich oder abzählbar. Jedes Dreieck Δ kann nämlich offenbar nur endlichviele Punkte einer solchen Menge aufnehmen. Auf Mannigfaltigkeiten, für welche wir die Zerlegbarkeit in Elementardreiecke nicht voraussetzen, ist der letzte Satz nicht allgemein richtig. Wäre die Menge der irregulären Elemente in einem analytischen Gebilde nicht abzählbar, so könnte das analytische Gebilde gewiß nicht trianguliert werden. Umgekehrt wird diese Tatsache, daß ein analytisches Gebilde in Wahrheit nur abzählbar viele irreguläre Elemente enthält, in § 6 für uns der wesentliche Ausgangspunkt werden für die wirkliche Triangulation eines beliebigen analytischen Gebildes.

Gibt es überhaupt keine unendliche Punktmenge ohne Verdichtungsstelle auf $\mathfrak{F}$, so heißt $\mathfrak{F}$ **geschlossen.** Eine Menge ohne Verdichtungsstelle erhält man, wenn man willkürlich im Innern eines jeden Elementardreiecks Δ einer bestimmten Zerlegung von $\mathfrak{F}$ einen Punkt wählt. Also: *Eine geschlossene Fläche läßt sich in endlichviele, niemals aber in unendlichviele Elementardreiecke zerlegen.* Aber auch umgekehrt: *Eine* **offene** *(= un-*

geschlossene) Fläche läßt sich in unendlichviele, niemals aber in endlichviele Elementardreiecke zerlegen. Denn ist die Anzahl der Elementardreiecke Δ endlich, so hat jede unendliche Punktmenge auf $\mathfrak{F}$ eine Verdichtungsstelle, da auf mindestens eines der Dreiecke Δ unendlichviele Punkte einer solchen Menge entfallen müssen.

§ 5. Beispiele von Flächen.

1. Die *Euklidische Ebene* (offen).
2. Das *Innere eines Quadrats* (offen).

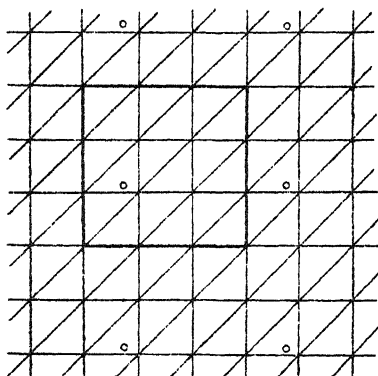



Fig. 2. Triangulation der Ebene und der Fläche $\mathfrak{T}$ (S. 28).

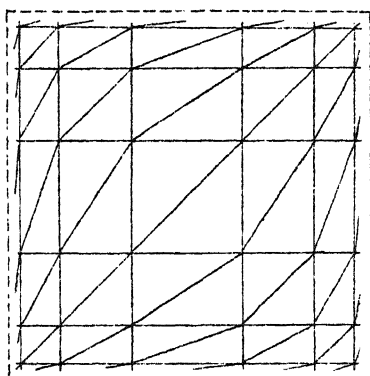



Fig. 3. Triangulation des Quadratinnern.

Durch die beigefügten Figuren soll eine bestimmte Triangulation dieser Flächen angedeutet sein. Dabei ist jedes Dreieck dadurch zu einem „Dreieck auf $\mathfrak{F}$" im Sinne von § 4 zu machen, daß man die Punkte desselben durch die zu den Ecken des Dreiecks gehörigen homogenen Schwerpunktskoordinaten zur Darstellung bringt.

3. Die *projektive Ebene.* Sie kann arithmetisch definiert werden als Gesamtheit der aus irgend drei reellen Zahlen $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \neq (0, 0, 0)$ zu bildenden Verhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$. Der Begriff der Umgebung ist so zu fassen, daß ein variabler „Punkt" $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ dann und nur dann gegen den festen Punkt $\xi_1^0 : \xi_2^0 : \xi_3^0$ konvergiert, falls

$$\frac{(\xi_2\xi_3^0 - \xi_3\xi_2^0)^2 + (\xi_3\xi_1^0 - \xi_1\xi_3^0)^2 + (\xi_1\xi_2^0 - \xi_2\xi_1^0)^2}{[(\xi_1^0)^2 + (\xi_2^0)^2 + (\xi_3^0)^2][\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2]}$$

gegen 0 geht. Eine Triangulation (in zehn Elementardreiecke) wird durch Figur 4 angedeutet; dabei ergibt sich ohne weiteres, wie die einzelnen Dreiecke mit Hilfe der zu jedem von ihnen gehörigen projektiven Dreieckskoordinaten als „Dreiecke" in unserm allgemeinen Sinne aufgefaßt werden können. Die projektive Ebene ist *geschlossen.*

4. Die *Oberfläche des regulären Oktaëders* zerfällt auf natürliche Weise in acht Dreiecke, die, auf ihre Schwerpunktskoordinaten bezogen,

als Elementardreiecke einer Triangulation aufgefaßt werden können. Geschlossen.

5. Durch Projektion des regulären Oktaëders von seinem Mittelpunkt aus auf die Oberfläche der umbeschriebenen *Kugel* erhält man die Kugel als eine in acht Elementardreiecke (die Oktanten) zerlegte Mannigfaltigkeit. Kugel und Oktaëder sind im Sinne der Analysis situs äquivalent.

6. Das *Möbiussche Band.*[1]) Es entsteht aus einem langen schmalen Rechteck, wenn man dasselbe im dreidimensionalen Raum um 180° tordiert und so zusammenbiegt, daß die Schmalseiten des Rechtecks in verkehrter Lage zur Deckung kommen. Diese Raumfläche läßt sich, auf rechtwinklige Koordinaten xyz bezogen, mit Hilfe zweier reeller Parameter ϱ, φ am einfachsten analytisch so zur Darstellung bringen[2]):

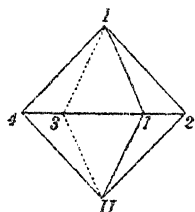



Fig. 4. Triangulation der projektiven Ebene.

Fig. 5. Oktaëder.

Fig. 6. Möbiussches Band.

$$x = (a - \varrho \sin \tfrac{1}{2}\varphi) \cos \varphi$$
$$y = (a - \varrho \sin \tfrac{1}{2}\varphi) \sin \varphi$$
$$z = \varrho \cos \tfrac{1}{2}\varphi.$$

φ ist unbeschränkt veränderlich, ϱ an die Bedingung $|\varrho| < h$ geknüpft; a und h bedeuten positive Konstante, von denen h die kleinere sein muß. Im Sinne der Analysis situs ist das Möbiussche Band offenbar mit der folgenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$ identisch:

In einer Euklidischen Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten ϱ, φ betrachten wir den Streifen $|\varrho| < 1$ und die durch

$$\varrho' = (-1)^n \varrho, \quad \varphi' = \varphi + 2n\pi \quad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots]$$

definierte diskrete Gruppe Γ von Paddelbewegungen[3]) $(\varrho, \varphi) \rightarrow (\varrho' \varphi')$. Ein

1) Möbius, Werke, Bd. 2, S. 484—485 und S. 519—521.

2) Die durch diese Gleichungen dargestellte Fläche ist allerdings keine Developpable.

3) Das (niederdeutschem Sprachgebrauch entlehnte) Wort „Paddelbewegung" soll darauf hindeuten, daß die Gruppe erhalten wird, indem man die Ebene fortgesetzt um eine Achse umklappt, abwechselnd links herum und rechts herum, sie dabei aber gleichzeitig jedesmal (um das Stück 2π) in Richtung jener Achse vorwärtsschiebt.

Punktsystem S in dieser Ebene heißt ein **System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte** (oder kürzer: ein **Punktsystem zu Γ**), wenn durch jede Bewegung der Gruppe Γ die Punkte von S ineinander übergehen, aber auch jeder Punkt von S in jeden andern durch eine Bewegung dieser

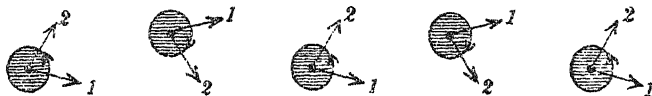



Fig. 7a. Punkt auf $\mathfrak{B}$ mit Umgebung und Winkel.

Gruppe übergeführt werden kann. Ein dem Streifen $|\varrho| < 1$ angehöriges Punktsystem zu Γ nennen wir einen „Punkt" der zu definierenden Mannigfaltigkeit $\mathfrak{B}$. Ist S_0 ein solcher „Punkt" von $\mathfrak{B}$ und schlägt man um die einzelnen (Euklidischen) Punkte des Punktsystems S_0 lauter kongruente Kreise (Fig. 7a), die ganz im Streifen liegen, so bilden diejenigen Punktsysteme S zu Γ, die in jedem dieser Kreise durch einen Punkt vertreten sind, eine „Umgebung" von S_0 auf $\mathfrak{B}$. Sagt man von einem gewöhnlichen Punkte, der dem Punktsystem S zu Γ angehört, er *„liege über"* dem „Punkte" S von $\mathfrak{B}$, so erscheint der Parallelstreifen als eine *„Überlagerungsfläche"* über $\mathfrak{B}$, welche $\mathfrak{B}$ unendlichviel-blättrig überzieht, ohne jedoch an irgend einer Stelle relativ zu $\mathfrak{B}$ *verzweigt* zu sein. Im Parallelstreifen wenden wir die Euklidische Winkelmessung an; indem wir ihn als Überlagerungsfläche von $\mathfrak{B}$ auffassen, überträgt sich diese Winkelmessung ohne weiteres auf $\mathfrak{B}$. Dabei wird aber das Winkelmaß nicht bloß bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π, sondern auch seinem Vorzeichen nach unbestimmt (Fig. 7a). Dieser Umstand hängt mit einer Eigenschaft des Möbiusschen Bandes zusammen, die man als seine „Einseitigkeit" bezeichnet (ohne die Fläche zu verlassen und ohne über ihren Rand zu klettern, kann man von der einen Seite auf die andere kommen) und die wir hernach ihrer funktionentheoretischen Bedeutung wegen noch genauer ins Auge fassen werden. — Eine Triangulation von $\mathfrak{B}$ und damit des Möbiusschen Bandes deutet Fig. 7b an.

Fig. 7b. Triangulation von $\mathfrak{B}$.

7. Der *Torus* entsteht (Fig. 8), wenn man einen Kreis vom Radius r um eine in seiner Ebene gelegene Achse, die den Kreis nicht trifft, rotieren läßt; $R(> r)$ möge der senkrechte Abstand des Kreismittelpunktes von der Achse sein. Die rechtwinkligen Koordinaten xyz der Punkte auf der Fläche lassen sich mit Hilfe zweier reeller Parameter σ, φ, deren geometrische Bedeutung evident ist, in der Form

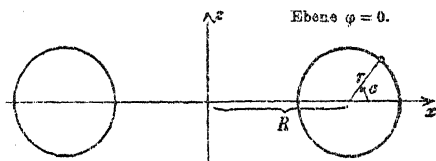



Fig. 8. Konstruktion des Torus.

$$\begin{cases} x = (R + r\cos\sigma)\cos\varphi, \\ y = (R + r\cos\sigma)\sin\varphi, \\ z = r\sin\sigma \end{cases}$$

darstellen. Dem Torus kommt als einer Fläche im dreidimensionalen Euklidischen Raum eine natürliche (Euklidische) Winkelmessung zu. Ist eine Kurve auf dem Torus

$$\varphi = \varphi(\lambda), \quad \sigma = \sigma(\lambda)$$

gegeben, wobei $\frac{d\varphi}{d\lambda}, \frac{d\sigma}{d\lambda}$ stetig seien und durchweg $\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + \left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2 \neq 0$, so berechnet sich der Differentialquotient der Bogenlänge $s = s(\lambda)$ dieser Kurve aus:

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = (R + r\cos\sigma)^2\left(\frac{d\varphi}{d\lambda}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\sigma}{d\lambda}\right)^2.$$

Führt man statt σ einen neuen Parameter ψ ein:

$$\psi = \int^{\sigma} \frac{d\sigma}{\frac{R}{r} + \cos\sigma} \tag{8}$$

so kann man statt dessen schreiben

$$ds^2 = e(d\varphi^2 + d\psi^2), \text{ wo } e = (R + r\cos\sigma)^2. \tag{9}$$

Durch (8) ist ψ als eindeutige, stetig differentiierbare Funktion von σ, aber auch umgekehrt σ als eine ebensolche Funktion von ψ erklärt. Die Werte (φ, ψ), die einem bestimmten Punkt auf dem Torus entsprechen, sind nur bis auf ganzzahlige Vielfache von

$$2\pi, \quad \text{bzw.} \int_0^{2\pi} \frac{d\sigma}{\frac{R}{r} + \cos\sigma} \quad \frac{2\pi r}{\sqrt{R^2 -}}$$

bestimmt. Wir werden so dazu geführt, in einer Euklidischen Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten φ, ψ die Translationsgruppe

$$\left.\begin{aligned} &\varphi' = \varphi + 2m\pi, \quad \psi' = \psi + \frac{2\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}}\, n \\ &\begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \Gamma$$

zu betrachten und ein System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte, ein sog. „**Punktgitter**", als „Punkt" einer neuen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ anzusprechen, über der sich dann die Ebene als unendlichviel-blättrige, aber nirgends verzweigte Überlagerungsfläche ausbreitet. Die Euklidische Winkelmessung der Ebene überträgt sich ohne weiteres auf die Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$, und es resultiert daraus nicht (wie im Falle des Möbius-

schen Bandes) eine Unsicherheit hinsichtlich des Winkelvorzeichens. Auf diese Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ ist der Torus vermittels seiner Darstellung durch die Parameter φ, ψ umkehrbar-eindeutig und -gebietsstetig abgebildet; aber nicht nur das: die Abbildung ist auch *konform.* Die Gleichung (9) besagt nämlich, daß das Verhältnis eines Bogenelements ds auf dem Torus zu dem Bildelement $(\sqrt{d\varphi^2 + d\psi^2})$ in der $\varphi\psi$-Ebene $= \sqrt{e} = R + r \cos \sigma$ ist, also nur von der Stelle, an der sich das Bogenelement befindet, nicht aber von dessen Richtung abhängt. Diese konforme Abbildung liefert die Grundlage für die Theorie der analytischen Funktionen auf dem Torus. — Der Torus ist *geschlossen*; eine Triangulation ist durch Fig. 2 gegeben, wenn das dort stark ausgezogene Rechteck, dessen Seiten den Koordinatenachsen parallel sind, die Seitenlängen 2π und $\frac{2\pi r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ besitzt. Auch ist in dieser Figur ein „Punkt" von $\mathfrak{T}$ durch Nullkreise markiert.

8. Die möglichen simultanen *Stellungen zweier* auf einem Zifferblatt spielender *Zeiger* sind die Punkte einer Mannigfaltigkeit, auf der man eine stetige Kurve beschreibt, wenn man die beiden Zeiger irgendwie gleichzeitig in stetiger Weise bewegt. Diese Mannigfaltigkeit ist offenbar geschlossen und dem Torus äquivalent.

9. Damit eine Fläche im Sinne der Analysis situs gegeben ist, genügt es, die Dreiecke, aus denen sie (nachdem sie in einer bestimmten Weise trianguliert ist) besteht, durch irgendwelche Symbole (z. B. Nummern) zu kennzeichnen und die Verknüpfung dieser Dreiecke anzugeben. Am einfachsten geschieht das in der Weise, daß man die Ecken numeriert und dann jedes Dreieck in der Form (efg) [oder (feg) oder $\cdots$] notiert, wenn e, f, g die Nummern seiner Ecken sind.[1]) Das so entstehende Schema wird der Bedingung genügen, daß jede Ecke e_0 nur in einem einzigen endlichen Zyklus von Dreieckssymbolen:

$$(e_0 e_1 e_2), \quad (e_0 e_2 e_3), \quad \cdots, \quad (e_0 e_{h-1} e_h), \quad (e_0 e_h e_1)$$

auftritt. Ferner wird man die Eckennummern in keiner Weise so in zwei Klassen teilen können, daß jedes Dreieckssymbol entweder drei Ecken aus der einen oder drei Ecken aus der andern Klasse aufweist. Jedes Schema von Symbolen (efg), das diesen Bedingungen genügt, definiert auch eine bestimmte Fläche im Sinne der Analysis situs (samt einer bestimmten Triangulierung gegeben). Diese abstrakte Art der Beschreibung eignet sich insbesondere für *geschlossene* Flächen, da für diese das nur aus endlichvielen Symbolen bestehende Schema vollständig hingeschrieben werden kann. Die Aufstellung aller zulässigen endlichen Schemata ist eine rein kombinatorische Aufgabe. Es erhebt sich natür-

1) Möbius, Werke Bd. II, S. 478f

lich sogleich die Frage, wann zwei solche endlichen Schemata eine und dieselbe Fläche (in verschiedener Triangulierung) darstellen; die weiteren Entwicklungen über Analysis situs, die dieses Kapitel enthält, werden wichtige Beiträge zur Beantwortung dieser Frage liefern.

Das Schema des *Tetraeders* und damit der *Kugel* lautet beispielsweise:

(123) (234) (341) (412).

In anderer, oktaëdrischer Triangulierung [vgl. Fig. 5] kann die Kugel durch die Tabelle

(I 1 2) (I 2 3) (I 3 4) (I 4 1)
(II 1 2) (II 2 3) (II 3 4) (II 4 1)

beschrieben werden. Die *projektive Ebene* in der oben [Fig. 4] gezeichneten Triangulation besitzt das folgende Schema[1]):

(1 2 I) (2 3 II) (3 1 III)
(1 2 II) (2 3 III) (3 1 I)
(1 II III) (2 III I) (3 I II)
(I II III).

10. Jedes *analytische Gebilde* liefert ein Beispiel für eine „Fläche" in unserm Sinne, wenn wir die dem analytischen Gebilde angehörigen Funktionselemente als „Punkte" betrachten und den zur Definition der Fläche erforderlichen Begriff „Umgebung" mit dem in § 2 behandelten Begriff „analytische Umgebung" zusammenfallen lassen. Es ist zunächst klar, daß in dieser Deutung jedes analytische Gebilde zu einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit wird; nur bleibt noch zu beweisen, daß diese Mannigfaltigkeit stets auch einer bestimmten Triangulierung fähig ist.

§ 6. Analytische Gebilde, als Flächen betrachtet.

Ein Dreieck Δ auf einer beliebigen zweidimensionalen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ kann man derartig Punkt für Punkt durch ein Euklidisches Dreieck D mit den Ecken 1, 2, 3 repräsentieren, daß man jedem Punkt von Δ, der nach S. 21 ein bestimmtes Koordinatenverhältnis $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ (in Δ) besitzt, denjenigen Punkt von D zuordnet, dessen homogene Schwerpunktskoordinaten in bezug auf [illegible] 1, 2, 3 den gleichen Wert $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ besitzen. Und umgekehrt [illegible] eine Punktmenge Δ auf $\mathfrak{F}$, die umkehrbar eindeutig und stetig auf [illegible] Euklidisches Dreieck D abgebildet ist, auf Grund dieser Abbildung als ein Dreieck auf $\mathfrak{F}$ ansprechen. Jede in D gelegene geradlinige Strecke ist dann Bild einer ganz in Δ

1) Die in den ersten beiden Zeilen stehenden Dreiecke ziehen sich durchs Unendliche.

verlaufenden Kurve auf $\mathfrak{F}$, die wir als „**Elementarstrecke**" in Δ bezeichnen, und jedes ganz in D gelegene Euklidische Dreieck D^* ist Bild eines Dreiecks Δ^* auf der Mannigfaltigkeit; Δ^* nennen wir ein „**Teildreieck**" von Δ.

$\mathfrak{F}$ sei in bestimmter Weise in Elementardreiecke zerlegt. Eine andere Zerlegung ζ' derselben Mannigfaltigkeit in Elementardreiecke nennen wir eine **Unterteilung** der ersten, ζ, wenn jedes Elementardreieck der Zerlegung ζ' Teildreieck eines Elementardreiecks der Zerlegung ζ ist. Ist ζ eine gegebene Zerlegung in Elementardreiecke, so kann man sich sehr leicht eine solche Folge von Triangulationen $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \cdots$ verschaffen, daß 1) $\zeta_1 = \zeta$ ist, 2) jedes ζ_{n+1} eine Unterteilung des vorhergehenden ζ_n ist und 3) die Teilung ζ_n mit unbegrenzt wachsendem n **beliebig fein** wird. Das letzte soll besagen: Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt von $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{U}$ eine beliebige Umgebung von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, so gibt es immer einen Index n derart, daß dasjenige Elementardreieck (oder ausnahmsweise: diejenigen Elementardreiecke) von ζ_n, in welchem (welchen) $\mathfrak{p}$ liegt, selber ganz in $\mathfrak{U}$ enthalten ist (sind). Waren auf $\mathfrak{F}$ irgend abzählbar unendlichviele Punkte $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_3, \cdots$ gegeben, so können wir diese Folge von immer feiner werdenden Unterteilungen noch so einrichten, daß $\mathfrak{p}_2$ unter den bei der Teilung ζ_2 auftretenden Eckpunkten enthalten ist, $\mathfrak{p}_3$ unter den Eckpunkten der Teilung ζ_3 usw. Von dieser Bemerkung werden wir sogleich Gebrauch machen.

Zunächst soll gezeigt werden, daß *jedes Gebiet $\mathfrak{G}$ auf einer Fläche $\mathfrak{F}$* (das nach S. 21 selbst als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit aufgefaßt werden kann) *einer Triangulation fähig ist, wenn dies für $\mathfrak{F}$ zutrifft.* Man gehe aus von einer Triangulation $\zeta = \zeta_1$ von $\mathfrak{F}$ und konstruiere dazu eine Folge von Unterteilungen $\zeta_2, \zeta_3, \ldots$, deren Feinheitsgrad mit wachsendem Index unter jede Grenze herabsinkt. Es seien Γ_1 diejenigen Dreiecke von ζ_1, die ganz innerhalb $\mathfrak{G}$ liegen; Γ_2 diejenigen Dreiecke von ζ_2, die ganz in $\mathfrak{G}$ liegen, aber nicht Teile der Γ_1 sind; Γ_3 diejenigen Dreiecke von ζ_3, die ganz in $\mathfrak{G}$ liegen, aber weder Teile von Dreiecken Γ_1 noch von Γ_2 sind; usw. Alle die Dreiecke $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, die in ihren inneren Punkten durchweg verschieden sind, aber zusammen das *ganze* Gebiet $\mathfrak{G}$ erfüllen, mögen mit einem gemeinsamen Namen „die Dreiecke Γ" heißen. *Auf den Kanten eines Dreiecks Γ liegen nur endlichviele Ecken von Dreiecken Γ.* Lägen daselbst nämlich unendlichviele, so hätten sie eine Verdichtungsstelle $\mathfrak{p}$. Zu $\mathfrak{p}$ gehört eine Umgebung $\mathfrak{U}$, die ganz in $\mathfrak{G}$ gelegen ist, und es findet sich ein Index n, so daß alle Dreiecke der Teilung ζ_n, welche $\mathfrak{p}$ enthalten, ganz in $\mathfrak{U}$ und damit ganz in $\mathfrak{G}$ gelegen sind. Im Innern des Dreieckpaars (oder Dreiecksterns) von ζ_n, welches $\mathfrak{p}$ enthält, kann aber, abgesehen vielleicht von $\mathfrak{p}$ selbst, kein Eckpunkt von Dreiecken Γ liegen. Das ist ein Widerspruch. — Unsere Konstruktion wird jetzt so fortgesetzt: Ein einzelnes Dreieck Γ, es heiße Γ^0, läßt sich so in

endlichviele Teildreiecke zerlegen, daß die Ecken dieser Teildreiecke genau alle die auf den Kanten von Γ^0 gelegenen Ecken der Dreiecke Γ sind (Fig. 9). Führen wir diesen Teilungsprozeß nicht nur mit Γ^0, sondern mit jedem Dreieck Γ aus, so gewinnen wir dadurch die gewünschte Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Elementardreiecke.

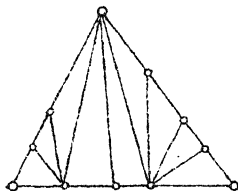



Fig. 9. Zerlegung in Teildreiecke.

Durch Überlegungen ganz analoger Art gelingt nun auch der am Schluß des vorigen Paragraphen angekündigte Nachweis, daß jedes analytische Gebilde $\mathbf{G}$, als zweidimensionale Mannigfaltigkeit aufgefaßt, in Elementardreiecke zerlegt werden kann. Wir operieren mit einer z-Kugel, deren Punkten wir in bekannter Weise (durch stereographische Projektion) die Werte der komplexen Veränderlichen z einschließlich ∞ zugeordnet denken. Ein zu $\mathbf{G}$ gehöriges Funktionselement:

$$u = \text{Potenzreihe in } \sqrt[\mu]{z - a}$$

nennen wir einen „über dem Punkte $z = a$ der z-Kugel gelegenen" Punkt von $\mathbf{G}$; schreitet u nach Potenzen von $\frac{1}{\sqrt[\mu]{z}}$ fort, so liegt das betreffende Funktionselement über dem Punkt ∞ der z-Kugel. $\mathbf{G}$ erscheint dieser Ausdrucksweise gemäß als eine gewisse Überlagerungsfläche über der z-Kugel, als ein Gebilde von der Art, wie es Riemann in seiner berühmten Dissertation[1]) zur Untersuchung mehrdeutiger analytischer Funktionen eingeführt hat, und das seitdem unter dem Namen „*Riemannsche Fläche*" die Theorie dieser Funktionen beherrscht.

Wir markieren auf der Kugel die abzählbarvielen Punkte $a_2, a_3, \ldots$, über denen verzweigte Funktionselemente („**Verzweigungspunkte**") von $\mathbf{G}$ liegen. ζ_1 bedeute die Zerlegung der Kugel in ihre acht Oktanten, die gemäß § 5, Beispiel 5) als Dreiecke auf der Kugel gelten sollen; $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \ldots$ sei eine mit ζ_1 beginnende Folge von Triangulationen der Kugel von der Beschaffenheit, daß immer ζ_{n+1} eine Unterteilung von ζ_n ist, a_n als Eckpunkt der Teilung ζ_n auftritt, und ζ_n mit unbegrenzt wachsendem n beliebig fein wird. Wir betrachten ein Dreieck D auf der Kugel, das in irgendeiner dieser Einteilungen ζ_n auftritt. Eine Punktmenge Δ auf $\mathbf{G}$ wird als ein über D gelegenes dreieckiges Stück von $\mathbf{G}$ zu bezeichnen sein, wenn die Beziehung

»*zu Δ gehöriger Punkt $\mathfrak{p}$ → Kugelpunkt, über dem $\mathfrak{p}$ liegt*«

eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung zwischen den Punkten von Δ und D ist. Δ erscheint dann zufolge dieser Abbildung als ein auf $\mathbf{G}$ definiertes Dreieck.

1) Werke, 2. Aufl., S. 7—9.

Wir suchen nun zunächst diejenigen Dreiecke Δ_1^* auf $\mathfrak{G}$ auf, welche über einem sphärischen Dreieck der Teilung ζ_1 liegen und keinen Verzweigungspunkt enthalten; solcher Dreiecke Δ_1^* wird es endlich- oder unendlichviele geben, vielleicht existiert aber auch gar keines. Darauf suchen wir diejenigen Dreiecke Δ_2^* auf $\mathfrak{G}$, welche über einem Dreieck der Teilung ζ_2 liegen, welche höchstens *einen* und zwar einen über a_2 gelegenen Verzweigungspunkt besitzen und welche nicht Teile von Dreiecken Δ_1^* sind; darauf diejenigen Dreiecke Δ_3^* auf $\mathfrak{G}$, welche folgende Eigenschaften besitzen: jedes Δ_3^* muß über einem Kugeldreieck der Teilung ζ_3 liegen, darf höchstens einen einzigen Verzweigungspunkt enthalten und dieser muß dann über a_2 oder über a_3 liegen, und Δ_3^* darf nicht Teil eines Dreiecks Δ_1^* oder Δ_2^* sein; usw. Die Dreiecke Δ^* ($\Delta_1^*, \Delta_2^*, \Delta_3^*, \ldots$), in ihren inneren Punkten durchweg verschieden, erfüllen zusammen die ganze Fläche $\mathfrak{G}$. In der Tat: ist $\mathfrak{e}$ irgendein Element von $\mathfrak{G}$, das über dem Punkte a der z-Kugel liegt, und ist k eine Kalotte um a, in der die Normaldarstellung von $\mathfrak{e}$ gültig ist, n ab ein Index von der Art, daß alle Dreiecke D_n der Teilung ζ_n, welche a enthalten, ganz in k liegen, und a, falls es Verzweigungspunkt ist, mit einem der Punkte $a_2, a_3, \ldots, a_n$ zusammenfällt: so liegt über jedem dieser Dreiecke D_n mindestens ein Dreieck auf $\mathfrak{G}$, welches $\mathfrak{e}$ enthält. Diese Dreiecke auf $\mathfrak{G}$ sind Dreiecke Δ_n^*, wenn sie nicht bereits als Teile in Dreiecken Δ_1^* oder Δ_2^* oder Δ_{n-1}^* enthalten waren.

Ohne Einführung neuer Eckpunkte läßt sich jetzt mit jedem Dreieck Δ^* eine solche Einteilung in endlichviele Dreiecke vornehmen, daß die dadurch entstehenden Dreiecke Δ auch noch diese Eigenschaft bekommen: jeder Punkt, der für *ein* Δ Eckpunkt ist, ist in allen (endlichvielen) Dreiecken Δ, denen er angehört, gleichfalls ein Eckpunkt. Um einzusehen, daß wir damit eine Zerlegung von $\mathfrak{G}$ in Elementardreiecke Δ gewonnen haben, beachte man folgende leicht zu beweisende Tatsachen:

Zwei Dreiecke Δ, die über einem und demselben Dreieck der z-Kugel liegen, haben entweder keinen Punkt gemein oder einen einzigen Eckpunkt, der dann ein Verzweigungspunkt ist.

Zwei Dreiecke Δ, die über zwei verschiedenen Dreiecken der z-Kugel mit gemeinsamer Kante liegen, haben entweder keinen Punkt gemein oder einen Eckpunkt, der dann ein Verzweigungspunkt ist, oder eine ganze Kante, die über der gemeinsamen Kante der beiden Kugeldreiecke liegt.

Zwei Dreiecke Δ, die über zwei Kugeldreiecken ohne gemeinsamen Punkt oder mit nur einem gemeinsamen Eckpunkt liegen, haben entweder keinen Punkt oder einen Eckpunkt gemein.

Ist $\mathfrak{e}$ unverzweigter Eckpunkt eines Dreiecks Δ, so machen die Dreiecke Δ, welche $\mathfrak{e}$ enthalten, einen einzigen Zykel aus, der Dreieck für Dreieck über einem Stern der z-Kugel liegt. Ist $\mathfrak{e}$ ein Verzweigungspunkt $(\mu - 1)^{\text{ter}}$ Ordnung ($\mu \geqq 2$), so ist er Eckpunkt für alle Dreiecke Δ, die $\mathfrak{e}$ enthalten; diese gruppieren sich um $\mathfrak{e}$ in einem einzigen Zykel, und

zwar liegen je μ Dreiecke des Zykels über einem und demselben Dreieck der z-Kugel.

§ 7. Begriff der Riemannschen Fläche.

Ist $\mathfrak{e}$ ein zu $\mathfrak{G}$ gehöriges Element und

$$z = P(t), \; u = Q(t)$$

eine für $|t| < r$ $[r > 0]$ gültige Darstellung desselben, so gehört zu jedem t, $|t| < r$, ein Element $\mathfrak{e}_t$, das durch Umordnen der Entwicklung von $\mathfrak{e}$.

$$z = P(t + t'), \; u = Q(t + t')$$

nach Potenzen von t' entsteht. Dieser Übergang $t \longrightarrow \mathfrak{e}_t$ ist eine umkehrbar eindeutige gebietsstetige Abbildung des Kreises $|t| < r$ auf eine gewisse Umgebung des Punktes $\mathfrak{e}$ auf $\mathfrak{G}$: der Parameter t erscheint so als eine in dieser Umgebung definierte stetige Funktion auf $\mathfrak{G}$; wir bezeichnen ihn als eine zum Punkte $\mathfrak{e}$ gehörige **„Ortsuniformisierende"**. Jede andere zu $\mathfrak{e}$ gehörige Ortsuniformisierende τ ist für hinreichend kleine t in der Form

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots \qquad (\gamma_1 \neq 0)$$

darstellbar. Eine komplexwertige Funktion f, die in einem Gebiet von $\mathfrak{G}$ definiert ist, wird in einem Punkte $\mathfrak{e}$ dieses Gebietes **regulär-analytisch** heißen, wenn sie sich in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{e}$ als reguläre Potenzreihe der zu $\mathfrak{e}$ gehörigen Ortsuniformisierenden t darstellen läßt:

$$f = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots.$$

Welche Ortsuniformisierende dabei t bedeutet, ist gleichgültig; wenn eine solche Darstellung durch *eine* Ortsuniformisierende möglich ist, so ist f in der gleichen Art auch durch jede andere Ortsuniformisierende darstellbar (natürlich immer nur in einer gewissen, noch von der Wahl der Ortsuniformisierenden abhängigen Umgebung von $\mathfrak{e}$).

Enthält die Entwicklung von $z[z = P(t)]$ in der Darstellung des Funktionselements $\mathfrak{e}$ keine negativen Potenzen von t, so ist das konstante Anfangsglied z_0 dieser Entwicklung allein von $\mathfrak{e}$, nicht aber von der Darstellung des Elements $\mathfrak{e}$ abhängig; z_0 wird als der **Wert** der komplexen Veränderlichen z im „Punkte" $\mathfrak{e}$ zu bezeichnen sein. Beginnt jene Entwicklung mit negativen Potenzen von t, so hat das Gleiche für eine jede Darstellung des Funktionselements $\mathfrak{e}$ statt, und der **Wert** von z im Punkte $\mathfrak{e}$ ist $= \infty$. *Auf diese Weise erscheint z als eine überall bis auf isolierte Unendlichkeitsstellen definierte eindeutige regulär-analytische Funktion auf der „Fläche" $\mathfrak{G}$.* Ganz analog können wir u als eine bis auf Pole in ganz $\mathfrak{G}$ eindeutig erklärte regulär-analytische Funktion auffassen. Als unabhängiges Argument in beiden Funktionen figuriert nicht eine komplexe Veränderliche im gewöhnlichen Sinne (d. h. nicht ein Punkt, der in einem

ebenen Gebiet variiert), sondern ein auf der „Riemannschen Fläche“ 𝔊 variabler Punkt.

Für die Behauptung, daß z und u analytische Funktionen auf der Fläche 𝔊 sind, ist es wesentlich, daß 𝔊 *nicht bloß als eine Fläche im Sinne der Analysis situs gegeben ist.* Denn auf einer Fläche, von der allein Analysis-situs-Eigenschaften in Betracht gezogen werden, kann man wohl von stetigen Funktionen sprechen, nicht aber von „stetig differentiierbaren“, „analytischen“ (oder gar „ganzen rationalen“) Funktionen oder dergl. Um auf einer Fläche 𝔉 analytische Funktionentheorie in analoger Weise wie in der komplexen Ebene treiben zu können, muß vielmehr (außer der Definition der Fläche) eine Erklärung abgegeben sein, durch welche der Sinn des Ausdrucks „analytische Funktion auf der Fläche“ so festgelegt wird, daß sich alle Sätze über analytische Funktionen in der Ebene, die „im Kleinen“ gültig sind, auf diesen allgemeineren Begriff übertragen. „Im Kleinen“ gültige Sätze sind dabei solche, deren Richtigkeit immer nur für eine gewisse Umgebung eines Punktes, über deren Größe der Satz selbst keine Auskunft gibt, behauptet wird. Durch eine solche Erklärung des Ausdrucks „analytische Funktion auf 𝔉“ wird die Fläche 𝔉 zur **Riemannschen Fläche.** Diese Auffassung des Begriffs der Riemannschen Fläche, in anschaulicher Form zuerst von F. Klein in seiner Schrift „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale“[1]) entwickelt, ist allgemeiner als diejenige, deren sich Riemann selbst in seinen grundlegenden Arbeiten über die Theorie der analytischen Funktionen bedient. Es kann aber kein Zweifel sein, daß erst bei dieser verallgemeinerten Fassung die Riemannschen Ideen in ihrer vollen Einfachheit und Kraft hervortreten. Zu ihr hat übrigens Riemann selbst durch die in seinem Habilitationsvortrag[2]) entwickelten, die

1) Leipzig 1882. Siehe ferner Klein, Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie, Math. Ann. Bd. 21 (1883), §§ 1—3 [S. 146—151]. Flächen, die durch Ränderzuordnung geschlossen sind, als Träger analytischer Funktionen kommen bereits früher vor (s. Riemann, Art. 12 der „Theorie der Abelschen Funktionen“, Werke S. 121; H. A. Schwarz in seiner fundamentalen Arbeit über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ aus dem Jahre 1870, Gesammelte mathematische Abhandlungen Bd. II, S. 161; Dedekind, Crelles Journal Bd. 83, 1877, S. 274 ff. Frei im Raum gelegene Flächen wurden, freilich nur zu Analysis-situs-Untersuchungen, zuerst herangezogen von Tonelli (1875; Atti dei Lincei, ser. II, t. 2) und Clifford (1876; Mathematical Papers, S. 249 ff.). Klein selbst hat, wie er in der Vorrede zu seiner Schrift „Über Riemanns Theorie“ (pag. IV) mitteilt, den ersten Anstoß zu seiner Auffassung durch eine gelegentliche mündliche Bemerkung von Prym (1874) erhalten. Bei Klein handelt es sich immer nur um *geschlossene* Gebilde. Der allgemeinste Begriff findet sich explizit wohl erst bei Koebe, vgl. z. B. Göttinger Nachrichten 1908, S. 338—339 (Fußnote).

2) „Über die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen“, Werke, 2. Aufl., S. 272—287.

n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten betreffenden Begriffsbildungen den Grund gelegt, und es darf wohl als sicher angenommen werden, daß für Riemann die in jenem Vortrag ausgesponnenen Gedanken in enger Beziehung zu seinen funktionentheoretischen Untersuchungen standen, obwohl diese Beziehungen von ihm nicht ausdrücklich hervorgehoben werden.

Allgemeine Definition des Begriffs der Riemannschen Fläche. *Liegt eine Fläche $\mathfrak{F}$ vor und ist außerdem für jeden Punkt $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ und jede in irgend einer Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ vorhandene Funktion $f(\mathfrak{p})$ auf $\mathfrak{F}$ erklärt, wann $f(\mathfrak{p})$ im Punkte $\mathfrak{p}_0$ regulär-analytisch heißen soll, so ist damit eine* **Riemannsche Fläche** $^{\mathfrak{R}}\mathfrak{F}$ *gegeben, als deren Punkte die Punkte von $\mathfrak{F}$ betrachtet werden. Jene Erklärung aber muß den folgenden Bedingungen genügen:*

1. *Ist $\mathfrak{p}_0$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{F}$, so gibt es eine Funktion $t(\mathfrak{p})$, die nicht nur im Punkte $\mathfrak{p}_0$ (woselbst sie den Wert 0 besitzt) sondern auch in allen Punkten $\mathfrak{p}$ einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ auf $\mathfrak{F}$ regulär-analytisch ist und von dieser Umgebung ein umkehrbar-eindeutiges, -gebietsstetiges Bild in der komplexen t-Ebene entwirft; eine solche Funktion heißt eine* **Ortsuniformisierende** *zu $\mathfrak{p}_0$.*

2. *Ist $f(\mathfrak{p})$ irgend eine im Punkte $\mathfrak{p}_0$ regulär-analytische Funktion und $t(\mathfrak{p})$ eine zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Ortsuniformisierende, so gibt es stets eine Umgebung $\mathfrak{U}_0$ von $\mathfrak{p}_0$, in welcher $f(\mathfrak{p})$ sich als eine reguläre Potenzreihe in $t(\mathfrak{p})$*

$$f(\mathfrak{p}) = a_0 + a_1 t(\mathfrak{p}) + a_2 (t(\mathfrak{p}))^2 + \cdots \tag{10}$$

darstellen läßt.

Aus diesen Forderungen ergibt sich: Ist τ neben t eine andere zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Ortsuniformisierende, so muß in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ eine Darstellung

$$\tau = \gamma_1 t + \gamma_2 t^2 + \cdots$$

gültig sein. Da sich aber auch umgekehrt t in analoger Weise durch τ ausdrücken muß, ist notwendig $\gamma_1 \neq 0$. Um die Analytizität einer Funktion $f(\mathfrak{p})$ im Punkte $\mathfrak{p}_0$ nachzuweisen, genügt es daher stets, die Existenz einer Darstellung (10) durch *eine einzige* zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Ortsuniformisierende $t(\mathfrak{p})$ zu erweisen.

Sind irgend zwei Riemannsche Flächen $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{F}_2$ gegeben, so heißt eine Abbildung, welche $\mathfrak{F}_1$ Punkt für Punkt umkehrbar-eindeutig und -gebietsstetig so auf $\mathfrak{F}_2$ abbildet, daß jede in irgend einem Punkte von $\mathfrak{F}_1$ regulär-analytische Funktion durch diese Abbildung in eine Funktion auf $\mathfrak{F}_2$ übergeht, die im Bildpunkt regulär-analytisch ist, eine **konforme Abbildung**. Der Grund für diese Benennung wird bald ersichtlich werden. Zwei Riemannsche Flächen, welche sich konform aufeinander abbilden lassen, werden als **(konform-) äquivalent** und nur als verschiedene

Verwirklichungen einer und derselben idealen Riemannschen Fläche zu betrachten sein. Als **innere Eigenschaften einer Riemannschen Fläche** werden stets nur solche gelten können, die gegenüber konformer Abbildung invariant sind, welche also, wenn sie *einer* Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ zukommen, auch jeder mit dieser äquivalenten Riemannschen Fläche anhaften. Alle Analysis-situs-Qualitäten gehören selbstverständlich zu diesen inneren Eigenschaften einer Riemannschen Fläche.

Jedes Teilgebiet einer Riemannschen Fläche ist selbst eine Riemannsche Fläche. Jede Ortsuniformisierende zu einem Punkt $\mathfrak{p}$ bildet eine gewisse Umgebung von $\mathfrak{p}$ konform auf ein ebenes Gebiet ab. Dabei ist die Ebene gleichfalls als Riemannsche Fläche aufzufassen und zwar so, wie es dem elementaren Begriff der analytischen Funktion in der komplexen Gaußschen Zahlenebene entspricht.

Wir haben oben erörtert, in welchem Sinne ein analytisches Gebilde als Riemannsche Fläche angesehen werden kann. Aber die Begriffe „analytisches Gebilde" und „Riemannsche Fläche" fallen nicht zusammen. Durch ein analytisches Gebilde (z, u) ist uns nicht bloß eine Riemannsche Fläche gegeben, sondern gleichzeitig zwei bis auf Pole reguläre Funktionen z und u auf ihr. z und u genügen dabei folgender Bedingung: Es gibt keine zwei verschiedene Punkte $\mathfrak{p}_1^0$, $\mathfrak{p}_2^0$ auf der Riemannschen Fläche, zugehörige Ortsuniformisierende t_1, bzw. t_2 und zwei nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihen $P(t)$, $Q(t)$ von der Art, daß

$$z = P(t_1),\ u = Q(t_1) \text{ in der Umgebung von } \mathfrak{p}_1^0,$$

$$z = P(t_2),\ u = Q(t_2) \text{ in der Umgebung von } \mathfrak{p}_2^0$$

ist. Zu einer beliebigen Riemannschen Fläche bekommt man immer dadurch, daß man auf ihr irgend zwei bis auf Pole reguläre Funktionen z, u auszeichnet, welche der eben formulierten Bedingung genügen, ein analytisches Gebilde. Wenn es aber überhaupt *ein* solches Funktionenpaar z, u gibt, so läßt es sich auch immer auf unendlichviele verschiedene Arten wählen; z. B. kann ich statt z, u irgend zwei lineare Kombinationen von z, u benutzen:

$$z' = az + bu, \quad u' = Az + Bu$$

$$[a, b;\ A, B \text{ konstant};\ aB - bA \neq 0].$$

Daß zu jeder vorgegebenen Riemannschen Fläche wirklich ein Funktionenpaar (z, u), *d. h. ein analytisches Gebilde gehört,* ist eine Grundtatsache der Riemannschen Funktionentheorie, deren Beweis für geschlossene Riemannsche Flächen in Kap. II dieser Schrift mit Hilfe des von Riemann zu dem gleichen Zweck verwendeten Thomson-Dirichletschen Prinzips erbracht werden wird.

Wir zählen nunmehr einige invariante Begriffe auf, welche das Verhalten von Funktionen und Kurven auf Riemannschen Flächen betreffen.

Beginnt die Entwicklung einer im Punkte $\mathfrak{p}_0$ regulären Funktion $f(\mathfrak{p})$ nach Potenzen der zu $\mathfrak{p}_0$ gehörigen Ortsuniformisierenden t mit dem Gliede $a_m t^m$ $(a_m \neq 0)$, so ist $\mathfrak{p}_0$ eine **Nullstelle der m^{ten} Ordnung** von f. Wir sagen auch: f hat an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ die **Ordnung** m. Ist $\tau(\mathfrak{p})$ irgend eine andere Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}_0$,

$$t = c_1\tau + c_2\tau^2 + \cdots \quad (c_1 \neq 0),$$

so beginnt die Entwicklung von f nach Potenzen von τ mit dem Gliede $a_m c_1{}^m \cdot \tau^m$; daraus folgt die „Invarianz" der Ordnung m einer Nullstelle. Gestattet eine Funktion $f(\mathfrak{p})$ in einer gewissen Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}_0$, abgesehen vom Punkte $\mathfrak{p}_0$ selbst, eine Entwicklung

$$f = \frac{a_{-n}}{t^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{t} + a_0 + a_1 t + \cdots \; [a_{-n} \neq 0, n \text{ ganz und} > 0],$$

so hat f an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ einen **Pol n^{ter} Ordnung**; wir sagen auch: f hat an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ die **Ordnung** $-n$. Invarianzbeweis wie oben. Hat die Funktion $f(\mathfrak{p})$ an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ die Ordnung k ($\gtreqless 0$) und $g(\mathfrak{p})$ die Ordnung l, so hat $f \cdot g$ in $\mathfrak{p}_0$ die Ordnung $k + l$, $\frac{f}{g}$ die Ordnung $k - l$.

Ist eine eindeutige Funktion f in der Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}_0$, abgesehen von diesem Punkte selbst, regulär-analytisch, so kann man ihr entweder im Punkte $\mathfrak{p}_0$ einen solchen Wert erteilen, daß sie auch in $\mathfrak{p}_0$ regulär ist, oder sie hat in $\mathfrak{p}_0$ einen Pol, oder sie hat dort eine **wesentlich-singuläre Stelle.** Im letzten Fall kommt $f(\mathfrak{p})$ in jeder Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ jedem Wert beliebig nahe.

Sind z, u zwei in einem Gebiet $\mathfrak{G}$ der Riemannschen Fläche bis auf Pole reguläre Funktionen, so ist auch jeder rationale Ausdruck $R(z, u)$ von z, u in $\mathfrak{G}$ bis auf Pole regulär. Indem man nämlich für z, u ihre Entwicklungen nach Potenzen der zu einem Punkt des Gebietes gehörigen Ortsuniformisierenden t einsetzt, erhält man für $R(z, u)$ eine nach ganzen Potenzen von t fortschreitende Reihe, die höchstens endlichviele negative Potenzen enthält. Also auch dort, wo sich für R durch direktes Einsetzen der *Werte* von z und u zunächst ein unbestimmter Ausdruck von der Form $\frac{0}{0}$ ergibt, liegen in Wahrheit keine Stellen der Unbestimmtheit vor.

Eine reelle Funktion U heißt an einer Stelle $\mathfrak{p}_0$ eine **harmonische** oder **Potential-Funktion,** falls es eine in diesem Punkte regulär-analytische Funktion gibt, mit deren Realteil U in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ übereinstimmt. Ist U in allen Punkten eines Gebietes harmonisch, aber nicht $=$ const., so kann U in keinem Punkte dieses Gebietes ein Maximum (größten Wert) oder Minimum (kleinsten Wert) besitzen. *Es gibt daher auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche außer der Konstanten keine überall harmonische und a fortiori keine überall regulär-analytische (eindeutige)*

Funktion. — Damit eine reelle Funktion U an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ **stetig differentiierbar** ist, muß U, das sich in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ als Funktion der zu $\mathfrak{p}_0$ gehörigen Ortsuniformisierenden $t = x + iy$ (x, y reell) auffassen läßt, für hinreichend kleine Werte von $|t|$ stetige erste Differentialquotienten $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$ besitzen. Welche Ortsuniformisierende t bei Anwendung dieses Kriteriums herangezogen wird, ist natürlich gleichgültig. Ähnlich kann man von 2mal, 3mal, ... stetig differentiierbaren Funktionen sprechen.

Eine Kurve $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ läßt sich in einer solchen Umgebung eines ihrer Punkte $\mathfrak{p}(\lambda_0) = \mathfrak{p}_0$, welche durch die zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Ortsuniformisierende t umkehrbar eindeutig und konform auf ein Gebiet der t-Ebene abgebildet wird, in der Form $t = t(\lambda)$ darstellen. Stimmt $t(\lambda)$ für reelle λ, die hinreichend nahe an λ_0 liegen und dem Intervall (01) angehören, mit einer konvergenten Potenzreihe $b_1(\lambda - \lambda_0) + b_2(\lambda - \lambda_0)^2 + \cdots$ überein, in der $b_1 = \left(\frac{dt}{d\lambda}\right)_{\lambda = \lambda_0} \neq 0$, so heißt die Kurve **für $\lambda = \lambda_0$ analytisch.** Der Invarianzbeweis ist trivial. Indem man den durch $t = b_1\tau + b_2\tau^2 + \cdots$ definierten Parameter τ als Ortsuniformisierende verwendet, erscheint ein gewisses Stück der Kurve, das $\mathfrak{p}(\lambda_0)$ enthält, in der τ-Ebene als ein Stück der reellen Achse. Unter einer **analytischen Kurve** schlechthin wird eine solche zu verstehen sein, die für alle Werte des von 0 bis 1 laufenden Parameters λ analytisch ist.

Wenn nur bekannt ist, daß der Differentialquotient $\frac{dt}{d\lambda}$ für Werte λ, die hinreichend nahe an λ_0 und im Intervall (01) liegen, existiert und in λ stetig ist, für $\lambda = \lambda_0$ aber einen Wert $\neq 0$ besitzt, so nennen wir die Kurve **für λ_0 stetig differentiierbar.** Sind

$$(11) \qquad \mathfrak{p} = \overset{1}{\mathfrak{p}}(\lambda), \quad \mathfrak{p} = \overset{2}{\mathfrak{p}}(\lambda)$$

zwei von demselben Punkt $\mathfrak{p}_0 = \overset{1}{\mathfrak{p}}(0) = \overset{2}{\mathfrak{p}}(0)$ ausgehende, für $\lambda = 0$ stetig differentiierbare Kurven,

$$\overset{1}{t}(\lambda), \quad t = \overset{2}{t}(\lambda) \quad [0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1]$$

die Bilder der Anfangsbögen jener beiden Kurven in der Ebene der zu $\mathfrak{p}_0$ gehörigen Ortsuniformisierenden t, so wollen wir den Winkel ϑ, welchen diese Bögen im Nullpunkt der t-Ebene miteinander bilden und der bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmt ist durch die Gleichungen

$$\left(\frac{d\overset{1}{t}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = r_1 e^{i\vartheta_1}, \quad \left(\frac{d\overset{2}{t}}{d\lambda}\right)_{\lambda=0} = r_2 e^{i\vartheta_2}$$
$$[r_1, r_2 > 0; \quad \vartheta_1, \vartheta_2 \text{ reell}]$$
$$\vartheta = \vartheta_2 - \vartheta_1.$$

auch als **Winkel** der beiden von $\mathfrak{p}_0$ ausgehenden Kurven (11) auf der

Riemannschen Fläche bezeichnen. Dieses Winkelmaß ist darum eine Invariante, weil der Übergang von einer Ortsuniformisierenden t zu einer andern τ vermittelt wird durch *winkeltreue* Abbildung eines den Nullpunkt enthaltenden Gebietes der t-Ebene auf ein ebensolches Gebiet der τ-Ebene. *Auf einer Riemannschen Fläche existiert demnach ein invariantes Winkelmaß.*[1]) Der oben erklärte Begriff der „konformen" Abbildung fällt nach Einführung dieses Winkelmaßes zusammen mit dem Begriff der umkehrbar-eindeutigen *winkeltreuen* Abbildung.

Eine singularitätenfreie Fläche im Euklidischen Raum, wie Kugel oder Torus, auf der (nach Verabredung über den Drehungssinn) eine bestimmte natürliche Euklidische Winkelmessung existiert, läßt sich auf eine einzige Art so als Riemannsche Fläche auffassen, daß die ihr als Riemannsche Fläche in der eben geschilderten Weise zukommende Winkelmessung mit der natürlichen übereinstimmt. Dabei muß die Möglichkeit, eine Umgebung jedes Punktes jener Fläche winkeltreu (im Euklidischen Sinne) auf ein ebenes Gebiet abzubilden, erwiesen sein.[2])

Für die *Kugel* liefert die stereographische Projektion eine auf der ganzen Kugel bis auf einen einzigen Pol 1. Ordnung reguläre Funktion z, die jeden Wert einschließlich ∞ einmal und nur einmal annimmt. Jede andere bis auf Pole reguläre Funktion auf der Kugel ist eine rationale Funktion von z, so daß die Theorie der bis auf Pole regulären Funktionen auf der Kugel wesentlich mit der der rationalen Funktionen einer Veränderlichen z übereinstimmt. Die Wahl der Unabhängigen z ist freilich bis zu einem gewissen Grade willkürlich; denn als solche eignet sich außer z auch jede Funktion z', die aus z durch eine lineare Transformation

$$z' = \frac{az+b}{cz+d} \quad [a, b, c, d \text{ konstant}; \quad ad - bc \neq 0]$$

hervorgeht. Die Lage und Vielfachheit der Nullstellen und Pole einer von wesentlichen Singularitäten freien analytischen Funktion kann auf der Kugel willkürlich vorgeschrieben werden, wenn nur die Gesamtordnung der Nullstellen mit der Gesamtordnung der Pole übereinstimmt.

Ganz anders gestalten sich die Dinge auf dem *Torus* (vgl. Kap. II). Als inneren Grund für die großen Unterschiede, die zwischen dem Ver-

1) Daß in gewissem Sinne auch eine derartige Längenmessung existiert, ist eine tiefliegende Tatsache aus der Theorie der „Uniformisierung". Vgl. §§ 19, 20 dieses Buches.

2) Vgl. L. Lichtenstein, Beweis des Satzes, daß jedes hinreichend kleine, im wesentlichen stetig gekrümmte, singularitätenfreie Flächenstück auf einen Teil einer Ebene zusammenhängend und in den kleinsten Teilen ähnlich abgebildet werden kann. Abhandlungen der K. Preuß. Akademie der Wissenschaften vom Jahre 1911, Anhang. — Schwierigkeiten entstehen, falls die Raumfläche Ecken besitzt. Über dieses Problem vgl. H. A. Schwarz in der bereits zitierten Arbeit, Gesammelte Abhandlungen Bd. 2, S. 161; es fand seine Lösung durch Koebe, Göttinger Nachrichten 1908, S. 359—360, und R. König, Mathematische Annalen Bd. 71, 1912, S. 184—205.

halten der Funktionen auf dem Torus einerseits, der Funktionen auf der Kugel anderseits bestehen, läßt sich fast überall der eine Umstand nachweisen (der nicht in dem Bereich der Funktionentheorie, sondern der Analysis situs liegt!), daß auf dem Torus ein System zweier geschlossener, sich gegenseitig in einem Punkte treffender Kurven gezogen werden kann ($\varphi = 0$ und $\psi = 0$ in der Bezeichnung von § 5, Beispiel 7), welches den Torus nicht zerlegt — während ein solches System auf der Kugel nicht existiert. Bilden wir den Torus konform auf die Punktgitter-Mannigfaltigkeit $\mathfrak{T}$ (§ 5) ab, so erscheinen die von wesentlichen Singularitäten freien Funktionen auf dem Torus als solche eindeutige, bis auf Pole reguläre Funktionen der komplexen Veränderlichen $w = \varphi + i\psi$, welche *doppelperiodisch* sind mit den Perioden 2π, $\frac{2\pi i r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$, d. i. als *elliptische Funktionen* (von rein imaginärem Periodenverhältnis $= \frac{ir}{\sqrt{R^2 - r^2}}$).

Zwei Tori sind als Flächen im Sinne der Analysis situs stets äquivalent. Sie können jedoch im allgemeinen nicht konform aufeinander abgebildet werden, sondern dies ist dann und nur dann möglich, wenn für beide Tori der „Modul" $\frac{r\sqrt{R^2 - r^2}}{R^2}$ denselben Wert hat. Das Wort **„Modul"** hat hier diese Bedeutung: Ist in einer Schar Riemannscher Flächen, die alle untereinander im Sinne der Analysis situs äquivalent sind, irgendwie jeder von ihnen eine Zahl so zugeordnet, daß zwei Flächen der Schar jedenfalls dann dieselbe Zahl zugeordnet erscheint, falls die beiden Flächen *konform*-äquivalent sind, so heißt jene Zahl, in ihrer Abhängigkeit von den Riemannschen Flächen der Schar betrachtet, ein Modul der Schar. Die Tatsache, daß Äquivalenz im Sinne der Analysis situs, allgemein zu reden, die konforme Äquivalenz Riemannscher Flächen nicht nach sich zieht, ist von prinzipieller Wichtigkeit. — Die Punkte des einen Torus stellen wir uns dar als die Punktgitter einer w_1-Ebene mit den Perioden 2π und $2\pi i a_1 = 2\pi i \frac{r_1}{\sqrt{R_1^2 - r_1^2}}$, die Punkte des zweiten Torus als die den Perioden 2π und $2\pi i a_2$ $[a_2 > 0]$ entsprechenden Punktgitter einer w_2-Ebene. Liegt eine konforme Abbildung des einen Torus auf den andern vor, so ist jedem Gitter w_1 ein Gitter w_2 so zugeordnet, daß, wenn wir dem Gitter w_1 eine unendlichkleine Verrückung dw_1 erteilen, das Bildgitter w_2 eine unendlichkleine Verrückung dw_2 erfährt, deren Verhältnis $\frac{dw_2}{dw_1}$ zu dw_1 nur von dem Gitter w_1, nicht aber von der *Richtung* der Verrückung dw_1 abhängt; in seiner Abhängigkeit vom Gitter w_1 betrachtet, ist dieses Verhältnis eine regulär-analytische Funktion auf dem ersten Torus, muß also $=$ const. $= A$ sein. Daraus folgt, daß sich die konforme Abbildung in *dem* Sinne durch eine Formel

$$w_2 = Aw_1 + B \quad [A,\ B \text{ Konstante}] \tag{12}$$

darstellen lassen muß, daß man aus (12), wenn man für w_1 die sämtlichen Punkte eines w_1-Gitters einsetzt, immer die sämtlichen Punkte w_2 des korrespondierenden w_2-Gitters erhält. Eine einfache Gitterbetrachtung zahlentheoretischer Natur lehrt, daß dies nur möglich ist, wenn $A = \pm 1$ oder $= \pm \frac{i}{a_1}$ ist; im ersten Fall wird $a_2 = a_1$, im zweiten $a_2 = \frac{1}{a_1}$ sein. Auf jeden Fall ist demnach für die Möglichkeit der konformen Abbildung der beiden Tori die Gleichung

$$a_1 + \frac{1}{a_1} = a_2 + \frac{1}{a_2}$$

die notwendige (und offenbar auch hinreichende) Bedingung. Dies stimmt mit unserer Behauptung überein, da

$$\frac{r}{\sqrt{R^2 - r^2}} + \frac{\sqrt{R^2 - r^2}}{r} = \frac{R^2}{r\sqrt{R^2 - r^2}}$$

ist.

Wir schließen diesen Paragraphen mit einigen allgemeinen Bemerkungen über *die Idee der Riemannschen Fläche.* Der Grundgedanke, der ihrer Einführung zugrunde liegt, ist keineswegs auf die komplexe Funktionentheorie beschränkt. Eine Funktion von zwei reellen Veränderlichen x, y ist eine *Funktion in der Ebene;* aber es ist gewiß ebenso berechtigt, Funktionen auf der Kugel, auf dem Torus oder überhaupt auf einer Fläche zu untersuchen als gerade in der Ebene. Solange man sich freilich nur um das Verhalten der Funktionen „im Kleinen" kümmert — und darauf beziehen sich die meisten Betrachtungen der Analysis —, ist der Begriff der Funktion von zwei reellen Veränderlichen allgemein genug, da sich die Umgebung eines jeden Punktes einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit durch x, y (oder $x + iy$) zur Darstellung bringen läßt. Sobald man aber zur Untersuchung des Verhaltens von Funktionen *„im Großen"* fortschreitet, bilden die Funktionen in der Ebene einen wichtigen, aber *speziellen* Fall *unter unendlichvielen andern gleichberechtigten;* Riemann und Klein haben uns gelehrt, bei diesem speziellen Fall nicht stehen zu bleiben. Auf die komplexe Funktionentheorie angewendet, heißt das: *bevor man zum Studium irgendeiner Gattung von Funktionen schreitet, muß immer zunächst diejenige Fläche definiert sein, die das Variabilitätsgebiet des unabhängigen Arguments abgibt; darauf muß erklärt werden, was auf dieser Fläche „analytische Funktion" heißen soll, wodurch die Fläche zur Riemannschen Fläche wird; und nun erst kann man sich an die Funktionen selbst heranmachen.* Dementsprechend hat man an den Funktionen Eigenschaften dreier verschiedener Stufen zu beachten: 1. und das sind die einschneidendsten: die Analysis-situs-Qualitäten der Riemannschen Fläche, auf der die Funktionen existieren, 2. die inneren, nicht dem Bereich der Analysis situs angehörigen Eigenschaften dieser Riemannschen Fläche (z. B. bestimmter Wert eines „Moduls"), 3. diejenigen Eigenschaften (wie etwa Lage

und Ordnung der Nullstellen und Pole), durch die sich Funktionen hinsichtlich ihres Verhaltens auf derselben Riemannschen Fläche unterscheiden. Auf diesem Standpunkt spielt der Weierstraßsche Begriff des analytischen Gebildes nur eine sekundäre Rolle: er kommt erst dadurch zustande, daß man zwei auf einer und derselben Riemannschen Fläche existierende Funktionen kombiniert. Es ist ein natürlicher Schritt, statt nur zweier Funktionen dann auch etwa drei oder vier oder noch mehr Funktionen desselben variablen Punktes auf einer Riemannschen Fläche simultan zu betrachten. Diesen Schritt tun, heißt geometrisch gesprochen nichts anderes als: vom Studium der ebenen analytischen „Kurven" zu dem der Kurven im dreidimensionalen, vierdimensionalen, usw., Raum übergehen.

Die eindeutigen, bis auf Pole überall regulären Funktionen auf einer Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ werden wir meist kurz als die **„Funktionen auf der Fläche"** bezeichnen. Für *geschlossene* Riemannsche Flächen werden wir in Kap. II eine Übersicht über alle diese Funktionen gewinnen. Man kann aber auch folgende allgemeinere Klasse von zu $\mathfrak{F}$ gehörigen Funktionen ins Auge fassen: Man gebe sich ein Funktionselement auf $\mathfrak{F}$ (d. h. eine Potenzreihe, die nach ganzen Potenzen der zu einem Punkte $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ gehörigen Ortsuniformisierenden t fortschreitet); man kann dann versuchen, dieses Funktionselement längs aller möglichen Wege auf $\mathfrak{F}$ in analoger Weise analytisch fortzusetzen, wie das für den Fall der Ebene in § 1 geschildert wurde. Ist eine solche Fortsetzung auf allen Wegen eindeutig möglich, d. h. so, daß man höchstens auf Pole stößt, niemals aber auf Punkte, über die hinaus eine Fortsetzung überhaupt unmöglich ist („natürliche Grenzen") oder mehrdeutig wird (Verzweigung relativ zu $\mathfrak{F}$), so braucht die dadurch entstehende Funktion, wie das Beispiel $w = \varphi + i\psi$ auf dem Torus zeigt, keineswegs eindeutig zu sein; sondern im allgemeinen wird eine solche durch analytische Fortsetzung gewonnene Funktion erst eindeutig auf einer gewissen, über $\mathfrak{F}$ ohne Grenzen und ohne Verzweigungen sich ausbreitenden Überlagerungsfläche. Es ist nun bei vielen Fragen, namentlich in der *Uniformisierungstheorie*, von großer Wichtigkeit, den Bereich der eindeutigen Funktionen auf $\mathfrak{F}$ zu dem umfassenderen Bereich aller (endlich- oder unendlich-vieldeutigen) Funktionen zu erweitern, die auf $\mathfrak{F}$ unverzweigt und ohne wesentlich singuläre Stellen und natürliche Grenzen sind. Das legt uns die Verpflichtung auf, in diesem Kapitel, dessen Rest den für die Funktionentheorie grundlegenden Fragen der Analysis situs gewidmet ist, mit jeder Fläche $\mathfrak{F}$ zusammen die dazu gehörigen *Überlagerungsflächen* zu betrachten.

§ 8. Schlichtartige Flächen.

Eine Fläche $\mathfrak{F}$ in einer bestimmten Triangulation ζ bezeichne ich mit $\mathfrak{F}_\zeta$. Als **Elementarstrecke auf** $\mathfrak{F}_\zeta$ gilt jede ganz in einem Dreieck Δ von ζ enthaltene Elementarstrecke in Δ (s. § 6, S. 31). Dadurch daß

das eine der beiden Enden der Elementarstrecke als Anfangspunkt, das andere als Endpunkt bezeichnet wird, ist diese Strecke **gerichtet**. Endlichviele Elementarstrecken $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_n$ bilden einen **Streckenzug**, wenn immer der Endpunkt von σ_h mit dem Anfangspunkt von σ_{h+1} $[h = 1, 2, \cdot\cdot, n-1]$ zusammenfällt. Haben irgend zwei Strecken eines Streckenzuges nur dann, wenn sie aufeinander folgen, einen (und auch nur einen) Punkt gemein, so **überschneidet sich** der Streckenzug **nicht**: er ist ein **„einfacher"** Streckenzug. Stimmt der Endpunkt von σ_n mit dem Anfangspunkt von σ_1 überein, so ist der Streckenzug **geschlossen**; σ_1 ist dann die auf σ_n folgende Strecke (zyklische Anordnung). Ein geschlossener Streckenzug, in dem zwei Strecken nur dann einen Punkt gemein haben, wenn sie aufeinanderfolgen, wird als **Polygon** bezeichnet.

Zwei Punkte eines Gebiets $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{F}_\zeta$ lassen sich stets durch einen einfachen Streckenzug verbinden, der ganz in $\mathfrak{G}$ verläuft. Man kann nämlich die beiden Punkte zunächst durch eine ganz in $\mathfrak{G}$ verlaufende Kurve γ verbinden. Von der Einteilung ζ kann man eine so feine Unterteilung ζ' herstellen, daß alle Elementardreiecke von ζ', welche Punkte mit γ gemein haben, in $\mathfrak{G}$ liegen. Durch die auf S. 23f. angegebene Konstruktion erhält man eine einfache Kette von Dreiecken der Einteilung ζ', welche dasjenige Dreieck von ζ', in dem der Anfangspunkt von γ liegt, mit dem den Endpunkt von γ enthaltenden Dreieck verbindet. Die Dreieckskette läßt sich dann sofort durch einen einfachen Streckenzug ersetzen, der die Dreiecke der Kette sukzessive in je einer Strecke durchquert. — Ferner: Ist σ irgend ein Streckenzug auf $\mathfrak{F}_\zeta$, so kann man eine solche Unterteilung ζ' von ζ angeben, daß die Strecken, aus denen σ besteht, Kanten der Teilung ζ' (oder aus Kanten von ζ' zusammengesetzt) sind, daß also σ auf $\mathfrak{F}_{\zeta'}$ ein **Kantenzug** ist.

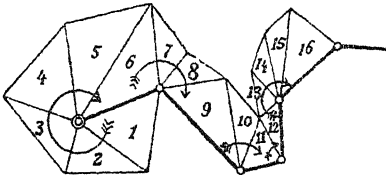



Fig. 10. Einfacher Streckenzug mit anstoßenden Dreiecken.

Von einer abgeschlossenen Menge $\mathfrak{E}$ auf $\mathfrak{F}$ sagen wir, sie **zerlegt** $\mathfrak{F}$ **nicht**, wenn die Punkte von $\mathfrak{F}$, die nicht zu $\mathfrak{E}$ gehören, ein einziges Gebiet ausmachen. *Ein einfacher Streckenzug σ zerlegt $\mathfrak{F}_\zeta$ nicht.* Wir machen zum Beweise eine solche Unterteilung ζ' von ζ, daß σ als Kantenzug erscheint. Die an σ anstoßenden Dreiecke von ζ' lassen sich dann in solcher Weise durchnumerieren: 1, 2, 3, . . ., daß je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke in dieser Numerierung eine nicht zu σ gehörige Kante gemein haben. Durch die Figur ist der Beginn einer solchen Numerierung angedeutet[1]). Ich behaupte, daß irgend zwei Punkte $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{F}$ miteinander durch eine stetige, σ nicht treffende Kurve verbunden werden können. Ich verbinde $\mathfrak{p}$ und

1) Man wird dabei freilich nicht immer vermeiden können, daß dasselbe Dreieck gelegentlich zwei- oder mehrmals mit verschiedenen Nummern auftritt.

$\mathfrak{q}$ durch eine Kurve γ auf $\mathfrak{F}$. Trifft γ den Streckenzug σ, so sei $\mathfrak{p}'$ der erste, $\mathfrak{q}'$ der letzte Schnittpunkt, $\mathfrak{p}''$ ein Punkt auf γ so kurz vor $\mathfrak{p}'$, daß $\mathfrak{p}''$ in einem der an σ anstoßenden Dreiecke liegt; $\mathfrak{q}''$ ein Punkt auf γ so kurz hinter $\mathfrak{q}'$, daß auch $\mathfrak{q}''$ noch in einem solchen Dreieck gelegen ist. Mit Hilfe der oben erwähnten Dreiecksnumerierung kann ich dann $\mathfrak{p}''$ und $\mathfrak{q}''$ durch einen Streckenzug verbinden, der σ nicht trifft und durch die an σ anstoßenden Dreiecke in der Reihenfolge ihrer Numerierung hindurchläuft. Dieser Streckenzug bildet zusammen mit dem Bogen $\mathfrak{p}\mathfrak{p}''$ und dem Bogen $\mathfrak{q}''\mathfrak{q}$ von γ eine Kurve, wie wir sie wünschen.

Ist $\mathfrak{E}$ eine abgeschlossene Menge, welche $\mathfrak{F}_\zeta$ nicht zerlegt, und σ eine Elementarstrecke auf $\mathfrak{F}_\zeta$, welche die beiden Endpunkte, sonst aber keinen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein hat, so zerlegt die Vereinigungsmenge $\mathfrak{E} + \sigma$ die Fläche $\mathfrak{F}$ entweder garnicht oder in zwei Gebiete. Ich kann mir beim Beweise σ als die gemeinsame Kante zweier Dreiecke Δ_1, Δ_2 von ζ vorstellen. $\mathfrak{p}_0$ sei ein Punkt von σ, der keiner der Endpunkte ist, $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_1$ eine kleine ins Innere von Δ_1 führende Elementarstrecke, die keinen Punkt mit $\mathfrak{E}$ gemein hat, $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_2$ eine ebensolche ins Innere von Δ_2 führende Strecke. Ich behaupte: jeden nicht zu $\mathfrak{E} + \sigma$ gehörigen Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ kann ich ohne Überschreitung von $\mathfrak{E} + \sigma$ entweder mit $\mathfrak{q}_1$ oder mit $\mathfrak{q}_2$ verbinden. Ich verbinde zunächst $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q}_1$ ohne Überschreitung von $\mathfrak{E}$ durch die Kurve γ. Treffe ich dabei σ zum ersten Male im Punkte $\mathfrak{p}_1$ (der keiner der Endpunkte von σ sein kann!), so werde ich einen Punkt $\mathfrak{p}_1'$ kurz vor $\mathfrak{p}_1$ so angeben können, daß der Teilbogen $\mathfrak{p}_1'\mathfrak{p}_1$ von γ entweder ganz in Δ_1 oder ganz in Δ_2 liegt. Je nachdem das eine oder das andere der Fall ist, kann ich von diesem Bogen aus mittels einer einzigen Elementarstrecke in Δ_1 bezw. Δ_2, welche weder $\mathfrak{E}$ noch σ trifft, zu der Strecke $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_1$, bezw. $\mathfrak{p}_0\mathfrak{q}_2$ gelangen. — Insbesondere wird $\mathfrak{F}$ durch $\mathfrak{E} + \sigma$ überhaupt nicht zerlegt, wenn sich $\mathfrak{q}_1$ mit $\mathfrak{q}_2$ (d. h. ein Punkt auf dem *einen* mit einem Punkt auf dem *andern „Ufer“* von σ) ohne Überschreitung von $\mathfrak{E} + \sigma$ verbinden läßt.

Die Kombination der in den beiden letzten Absätzen bewiesenen Tatsachen liefert das Resultat, daß *jedes Polygon die Fläche $\mathfrak{F}_\zeta$ in höchstens zwei Gebiete zerlegt;* denn ein Polygon kann entstanden gedacht werden durch Hinzufügung einer einzelnen Strecke (σ) zu einem einfachen Streckenzug ($\mathfrak{E}$). Wird $\mathfrak{F}_\zeta$ wirklich durch jedes Polygon zerlegt, so heißt die Fläche $\mathfrak{F}$ (nach Koebe) **schlichtartig**. Daß es nicht-schlichtartige Flächen gibt, zeigt das Beispiel des Torus.

Satz: Ist eine Fläche $\mathfrak{F}$ in der Triangulation ζ I schlichtartig, so ist sie auch schlichtartig, falls sie in irgend einer andern Weise ζ II in Elementardreiecke zerlegt wird.

Wir unterscheiden die auf die eine und die andere Zerlegung bezüglichen Begriffe wie „Strecke“, „Polygon“ und dergl. durch Zusatz einer I, bzw. II. Wäre $\mathfrak{F}$ in der Triangulation ζ II nicht schlichtartig, so gäbe es ein Polygon II, π_{II}, das $\mathfrak{F}$ nicht zerlegt. σ_{II} sei eine Strecke von π_{II},

von der wir annehmen können, daß sie, abgesehen vielleicht von ihren Endpunkten, im Innern eines Dreiecks Δ_{II} verläuft[1]). Wir kreuzen (Fig. 11) σ_{II} durch eine ganz im Innern dieses Dreiecks Δ_{II} gelegene Elementarstrecke II, $\tau_{II} = \mathfrak{q}'\mathfrak{q}''$, welche σ_{II} in $\mathfrak{p}$ treffen möge. $\mathfrak{q}'$ läßt sich mit $\mathfrak{q}''$ ohne Überschreitung von π_{II} durch eine stetige Kurve und also auch durch einen einfachen Streckenzug I, wir nennen ihn Σ_I, verbinden. Ich darf annehmen, daß Σ_I abgesehen von seinen beiden Endpunkten keinen Punkt mit der Strecke τ_{II} gemein hat.[2])

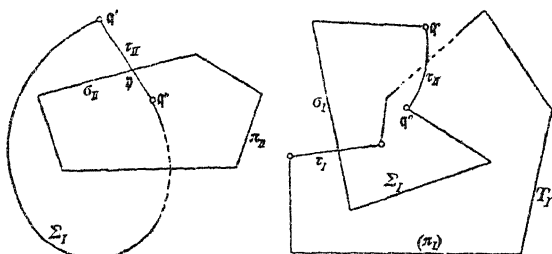



Fig. 11. Zum Invarianzbeweis der Schlichtartigkeit.

Da Σ_I die Fläche nicht zerlegt und das Polygon π_{II} (wenn ich aus ihm eine kleine, den Punkt $\mathfrak{p}$ enthaltende Strecke fortlasse) einen Punkt auf dem einen Ufer von τ_{II} mit einem Punkt auf dem andern Ufer ohne Überschreitung von $\Sigma_I + \tau_{II}$ verbindet, wird $\mathfrak{F}$ durch $\Sigma_I + \tau_{II}$ nicht zerlegt. Jetzt fasse ich eine Strecke σ_I von Σ_I ins Auge, von der ich wieder voraussetzen kann, daß sie keine Kante eines Dreiecks I ist, kreuze sie in dem Dreieck I, in dem sie liegt, durch eine kleine Strecke I, τ_I, und verbinde die Endpunkte von τ_I durch einen einfachen Streckenzug T_I, der $\Sigma_I + \tau_{II}$ nicht überschreitet. Ich darf annehmen, daß T_I mit τ_I nur die Endpunkte gemein hat; $\pi_I = T_I + \tau_I$ ist dann ein Polygon I, das $\mathfrak{F}$ nicht zerlegt, da die Kurve $\Sigma_I + \tau_{II}$ zwei an den beiden Ufern von σ_I einander gegenüberliegende Punkte ohne Überschreitung von π_I verbindet. $\mathfrak{F}$ kann also auch in der Triangulierung ζ I nicht schlichtartig gewesen sein.[3])

1) Wenn nämlich alle Strecken von π_{II} Kanten sind, können wir eine beliebige von ihnen, σ_{II}, durch einen einmal gebrochenen Streckenzug ersetzen, der in einem der beiden an σ_{II} anstoßenden Dreiecke verläuft, ohne daß π_{II} der Eigenschaft, $\mathfrak{F}$ nicht zu zerlegen, verlustig geht.

2) Sonst sei nämlich $\overset{*}{\mathfrak{q}}{}'$ derjenige Punkt, wo Σ_I, von $\mathfrak{q}'$ nach $\mathfrak{q}''$ durchlaufen, die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{q}'$ zum letzten Mal trifft, und $\overset{*}{\mathfrak{q}}{}''$ derjenige Punkt, wo *nach* diesem Moment Σ_I die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{q}''$ zum ersten Mal trifft, Σ_I^* aber der zwischen diesen beiden Ereignissen durchlaufene Teil von Σ_I: dann hat Σ_I^* mit der Strecke II, $\overset{*}{\tau}_{II} = \overset{*}{\mathfrak{q}}{}'\overset{*}{\mathfrak{q}}{}''$ nur die Endpunkte gemein, und wir könnten Σ_I durch Σ_I^*, τ_{II} durch $\overset{*}{\tau}_{II}$ ersetzen.

3) Wir haben damit ein Stück des „Jordanschen Kurvensatzes“ bewiesen, welcher aussagt, daß jede einfache geschlossene Kurve auf einer schlichtartigen Fläche (insbesondere in der Ebene) diese Fläche zerlegt. Außer dem ersten (lückenhaften) Beweis von C. Jordan selbst in seinem Cours d'analyse, 2. Aufl., Bd. I. S. 91—99, siehe namentlich Brouwer, Math. Ann., Bd. 69 (1910), S. 169—175.

§ 9. Überlagerungsflächen. Einfach zusammenhängende Flächen. Monodromiesatz und Cauchyscher Integralsatz.

Schärfer noch als der Begriff der Schlichtartigkeit ist der des *einfachen Zusammenhangs*, der in enger Beziehung zu der Konstruktion von Überlagerungsflächen steht. Ist $\mathfrak{F}$ eine gegebene Fläche, die **„Grundfläche“**, so wollen wir die Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ eine **Überlagerungsfläche** über $\mathfrak{F}$ nennen, wenn jedem Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ ein einziger Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$ als **„Spurpunkt“** von $\bar{\mathfrak{p}}$ zugeordnet ist; wir sagen dann auch, $\bar{\mathfrak{p}}$ **liegt über** $\mathfrak{p}$. Diese Zuordnung soll, jedenfalls dann, wenn wir $\overline{\mathfrak{F}}$ als (relativ zu $\mathfrak{F}$) **unverzweigt**[1]) bezeichnen, die folgende Bedingung erfüllen: Ist $\bar{\mathfrak{p}}_0$ ein beliebiger Punkt von $\overline{\mathfrak{F}}$, so gibt es stets eine Umgebung von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$, welche durch jene Zuordnung *umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig* auf ein Gebiet von $\mathfrak{F}$ bezogen ist. $\overline{\mathfrak{F}}$ möge eine in diesem Sinne unverzweigte Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}$ bedeuten. $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ sei eine von dem Punkte $\mathfrak{p}_0 = \mathfrak{p}(0)$ ausgehende Kurve γ auf $\mathfrak{F}$, $\bar{\mathfrak{p}}_0$ ein Punkt auf $\overline{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{p}_0$. Es können dann (vgl. § 1) zwei Fälle eintreten:

entweder: es gibt eine einzige von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ ausgehende stetige Kurve $\bar{\mathfrak{p}} = \bar{\mathfrak{p}}(\lambda)$ $[0 \leqq \lambda \leqq 1]$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$, sodaß für jeden Wert des Parameters λ der Punkt $\bar{\mathfrak{p}}(\lambda)$ über $\mathfrak{p}(\lambda)$ liegt;

oder: es existiert eine Schwelle Λ_0 $(0 < \Lambda_0 \leqq 1)$, sodaß wohl über jedem Teilbogen $0 \leqq \lambda \leqq \lambda_0$ von γ, für welchen $\lambda_0 < \Lambda_0$ ist, eine (und auch nur eine) von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ ausgehende Kurve auf $\overline{\mathfrak{F}}$ liegt, dies aber nicht mehr der Fall ist, sobald $\lambda_0 \geqq \Lambda_0$. Diesen letzten Fall kann man so auffassen: Wenn man die stetige Änderung eines Punktes $\bar{\mathfrak{p}}$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$, dessen Spurpunkt auf $\mathfrak{F}$ die Kurve γ beschreibt, von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ aus verfolgt, so stößt man, bevor das Ende erreicht ist, über dem Punkte $\mathfrak{p}(\Lambda_0)$ von $\mathfrak{F}$ auf eine *Grenze* der Überlagerungsfläche.

Tritt immer nur der erste Fall ein, welches auch der Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ und welches auch die von dem Spurpunkte $\mathfrak{p}_0$ von $\bar{\mathfrak{p}}_0$ ausgehende Kurve γ sein mag, so werden wir die Überlagerungsfläche demgemäß als **unbegrenzt** zu bezeichnen haben. Liegt über jedem Punkte von $\mathfrak{F}$ ein einziger Punkt der unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$, so ist $\overline{\mathfrak{F}}$ **einblättrig** und nicht wesentlich von $\mathfrak{F}$ verschieden. Gehören zu einer Fläche $\mathfrak{F}$ keine andern unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsflächen als nur einblättrige, so heißt $\mathfrak{F}$ **einfach zusammenhängend**[2]).

---

1) Das Wort drückt das, was es laut Definition besagen soll, eigentlich nicht vollständig aus; richtiger (aber auch umständlicher) wäre es, zu sagen „unverzweigt und ungefaltet“.

2) Diese Definition hebt diejenige Eigenschaft der einfach zusammenhängenden Flächen hervor, welche für die funktionentheoretischen Anwendungen die entscheidende ist.

Z. B. ist das Innere $\mathfrak{K}$ eines Kreises der Euklidischen Zahlenebene eine einfach zusammenhängende Fläche. Wir betrachten, um das nachzuweisen, eine beliebige unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{K}}$ über $\mathfrak{K}$. $\bar{\mathfrak{o}}$ sei ein Punkt auf $\overline{\mathfrak{K}}$, der über dem Mittelpunkt $\mathfrak{o}$ von $\mathfrak{K}$ liegt. Indem wir zu jeder von $\mathfrak{o}$ ausgehenden geradlinigen Strecke $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{K}$ diejenige in $\bar{\mathfrak{o}}$ beginnende (und etwa in $\bar{\mathfrak{p}}$ endigende) Kurve auf $\overline{\mathfrak{K}}$ aufsuchen, von der jene Strecke die Spur ist, erhalten wir zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{K}$ einen bestimmten darüber gelegenen Punkt $\bar{\mathfrak{p}}$ von $\overline{\mathfrak{K}}$. Können wir zeigen, daß diese Zuordnung $\mathfrak{p} \longrightarrow \bar{\mathfrak{p}}$ umkehrbar gebietsstetig ist, so ist damit der einfache Zusammenhang von $\mathfrak{K}$ erwiesen; denn dann müssen alle von $\bar{\mathfrak{o}}$ ausgehenden Kurven auf $\overline{\mathfrak{K}}$, deren Spurlinien von $\mathfrak{o}$ nach $\mathfrak{p}$ laufen, in *demselben* Punkte $\bar{\mathfrak{p}}$ münden, und $\overline{\mathfrak{K}}$ ist einblättrig.

Um aber jenen Nachweis zu erbringen, verfahren wir so: Der Punkt $\bar{\mathfrak{q}}$ beschreibe auf $\overline{\mathfrak{K}}$, von $\bar{\mathfrak{o}}$ ausgehend und in $\bar{\mathfrak{p}}$ endigend, diejenige Kurve, von der die geradlinige Strecke $\sigma = \mathfrak{o}\mathfrak{p}$ die Spur in $\mathfrak{K}$ ist, und $\mathfrak{q}$ sei in jedem Moment der Spurpunkt von $\bar{\mathfrak{q}}$. Jedem Punkt $\mathfrak{q} = \mathfrak{q}_0$ können wir einen Kreis $k\mathfrak{q}_0$ mit dem Mittelpunkt $\mathfrak{q}_0$ so zuordnen, daß ein $\bar{\mathfrak{q}}_0$ enthaltendes Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}$ auf $\overline{\mathfrak{K}}$ existiert, welches vermöge der Zuordnung »*Punkt auf* $\overline{\mathfrak{K}} \longrightarrow$ *Spurpunkt in* $\mathfrak{K}$« umkehrbar-eindeutig und -gebietsstetig auf $k\mathfrak{q}_0$ abgebildet wird. Solange $\bar{\mathfrak{q}}$ sich auf demjenigen Kurvenbogen bewegt, dessen Spur die durch $k\mathfrak{q}_0$ aus σ ausgeschnittene Strecke $\sigma\mathfrak{q}_0$ ist, liegt $\bar{\mathfrak{q}}$ in diesem Gebiet $\overline{\mathfrak{G}}$. Wir können nach dem sog. Heine-Borelschen Theorem, das den Grundlagen der Infinitesimal-Analysis angehört[1]), endlichviele Punkte der Strecke σ (vgl. Fig. 12)

$$\mathfrak{q}_0 = \mathfrak{o},\ \mathfrak{q}_1,\ \mathfrak{q}_2, \ldots,\ \mathfrak{q}_{n-1},\ \mathfrak{q}_n = \mathfrak{p} \text{ (in dieser Reihenfolge)}$$

so auswählen, daß die zugehörigen Intervalle $\sigma\mathfrak{o}$, $\sigma\mathfrak{q}_1$, $\sigma\mathfrak{q}_2, \ldots$, $\sigma\mathfrak{p}$ die ganze Strecke $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ derart bedecken, daß immer $\mathfrak{q}_{h+1}$ im Innern des Kreises $k\mathfrak{q}_h$ $[h = 0, 1, \ldots, n-1]$ gelegen ist. Es sei jetzt $\sigma' = \mathfrak{o}\mathfrak{p}'$ eine geradlinige Strecke von $\mathfrak{o}$ aus, deren Endpunkt $\mathfrak{p}'$ in $k\mathfrak{p}$ liegt und die im übrigen in solcher Nähe von $\mathfrak{o}\mathfrak{p}$ verläuft, daß sie einen Punkt $\mathfrak{q}_1'$ enthält, der gleichzeitig im Innern von $k\mathfrak{o}$ und $k\mathfrak{q}_1$ liegt, einen Punkt $\mathfrak{q}_2'$, der

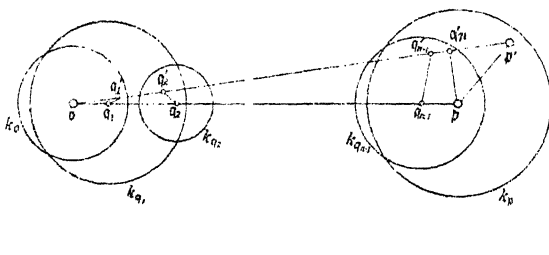



Fig. 12. Einfacher Zusammenhang der Kreisfläche.

1) Vgl. etwa Lebesgue, Leçons sur l'intégration, Paris 1904, S. 104—105.

gleichzeitig im Innern von $k\mathfrak{q}_1$ und $k\mathfrak{q}_2$ liegt, usw., schließlich einen Punkt $\mathfrak{q}_n'$, der gleichzeitig dem Innern von $k\mathfrak{q}_{n-1}$, $k\mathfrak{q}_n$ angehört. Wir ziehen die geradlinigen Strecken $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_1'$, $\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_2'$, ..., $\mathfrak{q}_{n-1}\mathfrak{q}_{n-1}'$, $\mathfrak{p}\mathfrak{q}_n'$, $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$. Diejenige von $\bar{\mathfrak{o}}$ ausgehende Kurve auf $\mathfrak{K}$, deren Spur das Dreieck $\mathfrak{o}\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_1'\mathfrak{o}$ ist, ist geschlossen, da dieses Dreieck ganz in $k\mathfrak{o}$ liegt. Diejenige von $\bar{\mathfrak{q}}_1$ ausgehende Kurve, deren Spur das Viereck $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_2'\mathfrak{q}_1'\mathfrak{q}_1$ ist, schließt sich, weil das Viereck ganz in $k\mathfrak{q}_1$ liegt. Aus diesen beiden Tatsachen folgt, daß die von $\bar{\mathfrak{o}}$ ausgehende Kurve, deren Spur das Dreieck $\mathfrak{o}\mathfrak{q}_2\mathfrak{q}_2'\mathfrak{o}$ beschreibt, sich schließt. In der gleichen Weise fortfahrend, kommen wir zu dem Ergebnis, daß die in $\bar{\mathfrak{o}}$ beginnende Kurve, deren Spur das Dreieck $\mathfrak{o}\mathfrak{p}\mathfrak{p}'\mathfrak{o}$ ist, geschlossen ist; daß also die in $\bar{\mathfrak{p}}$ beginnende Kurve, deren Spur die Strecke $\mathfrak{p}\mathfrak{p}'$ ist, in *demselben* Punkte $\bar{\mathfrak{p}}'$ mündet, wie die von $\bar{\mathfrak{o}}$ ausgehende Linie, deren Spurpunkt die Strecke $\sigma' = \mathfrak{o}\mathfrak{p}'$ beschreibt. Damit ist der gewünschte Nachweis erbracht.

Es folgt daraus: Wenn $\bar{\mathfrak{F}}$ eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsfläche über einer beliebigen Grundfläche $\mathfrak{F}$ ist, $\mathfrak{p}_0$ ein Punkt auf $\mathfrak{F}$ mit der Umgebung $\mathfrak{U}$, $\bar{\mathfrak{p}}_0$ ein über $\mathfrak{p}_0$ gelegener Punkt von $\bar{\mathfrak{F}}$, so gibt es ein einziges, $\bar{\mathfrak{p}}_0$ enthaltendes Gebiet $\bar{\mathfrak{U}}$ auf $\bar{\mathfrak{F}}$, das vermöge der Zuordnung »*Punkt von* $\bar{\mathfrak{F}}$ $\longrightarrow$ *Spurpunkt auf* $\mathfrak{F}$« umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig auf $\mathfrak{U}$ abgebildet erscheint. In ganz analoger Weise erkennt man, daß, wenn Δ ein den Punkt $\mathfrak{p}_0$ enthaltendes Elementardreieck einer bestimmten Triangulation ζ von $\mathfrak{F}$ ist, über Δ eine $\bar{\mathfrak{p}}_0$ enthaltende Punktmenge $\bar{\Delta}$ liegt, welche durch jene Zuordnung umkehrbar eindeutig und stetig auf Δ abgebildet ist und sich dadurch, daß man jedem Punkt von $\bar{\Delta}$ dasselbe Koordinatenverhältnis $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$ zuweist, das dem Spurpunkt in Δ entspricht, in ein Dreieck auf $\bar{\mathfrak{F}}$ verwandelt. Es geht daraus hervor: Konstruiert man zu jedem Elementardreieck Δ von ζ die sämtlichen darüber gelegenen Dreiecke $\bar{\Delta}$ auf $\bar{\mathfrak{F}}$, so erhält man eine Triangulation $\bar{\zeta}$ von $\bar{\mathfrak{F}}$.

Ferner können wir schließen: Ermittelt man zu zwei Kurven γ', γ'' auf $\mathfrak{F}$, welche die gleichen Punkte $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_1$ miteinander verbinden, diejenigen beiden, von einem Punkt $\bar{\mathfrak{p}}_0$ über $\mathfrak{p}_0$ ausgehenden Kurven auf $\bar{\mathfrak{F}}$, von denen γ', γ'' die Spurlinien sind, so führen beide zu dem gleichen Endpunkt $\bar{\mathfrak{p}}_1$ über $\mathfrak{p}_1$, *falls* γ', γ'' *hinreichend nahe beieinander verlaufen.* Die letzte Bedingung formuliert sich genauer so: γ' und γ'' sollen sich derart in endlichviele konsekutive Teilbögen

$$\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_n'; \text{ bzw. } \gamma_1'', \gamma_2'', \ldots, \gamma_n''$$

zerlegen lassen, daß immer γ_h' und γ_h'' ganz der Umgebung eines geeigneten Punktes $\mathfrak{q}_h$ auf $\mathfrak{F}$ angehören. Insbesondere läßt sich, wenn γ' gegeben ist, γ'' derart als *Streckenzug* auf $\mathfrak{F}$ (nachdem $\mathfrak{F}$ in bestimmter Weise trianguliert ist) konstruieren, daß die Kurven γ' und γ'' auf *jeder* unverzweigten,

unbegrenzten Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ zu dem gleichen Endpunkt führen, wenn man sie nur beide auf $\overline{\mathfrak{F}}$ von demselben Anfangspunkt ausgehen läßt.

Eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{F}$ pflegt man als **regulär** zu bezeichnen, wenn es niemals vorkommt, daß von zwei Kurven auf $\overline{\mathfrak{F}}$, welche in $\mathfrak{F}$ die gleiche Spurlinie besitzen, die eine geschlossen, die andere ungeschlossen ist. Ist $\overline{\mathfrak{F}}$ regulär und sind $\overline{\mathfrak{p}}_0$, $\overline{\mathfrak{p}}_0'$ irgend zwei Punkte auf $\overline{\mathfrak{F}}$, die **„sich decken“** (d. h. den gleichen Spurpunkt in $\mathfrak{F}$ besitzen), so gibt es eine einzige umkehrbar eindeutige und umkehrbar gebietsstetige Abbildung von $\overline{\mathfrak{F}}$ in sich, bei der jeder Punkt $\overline{\mathfrak{p}}$ in einen ihn deckenden $\overline{\mathfrak{p}}'$ und insbesondere $\overline{\mathfrak{p}}_0$ in $\overline{\mathfrak{p}}_0'$ übergeht. Diese **„Decktransformationen von $\overline{\mathfrak{F}}$ in sich“** bilden eine *Gruppe* Γ, und in Γ, als *abstrakte* Gruppe aufgefaßt, kommt die Beziehung von $\overline{\mathfrak{F}}$ zu $\mathfrak{F}$, soweit sie Analysis-situs-Charakter besitzt, zu reinem und vollständigem Ausdruck. Um die Existenz der Decktransformation

$$T:\ \overline{\mathfrak{p}} \longrightarrow \overline{\mathfrak{p}}'$$

nachzuweisen, verbinde man $\overline{\mathfrak{p}}_0$ mit $\overline{\mathfrak{p}}$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ durch eine Kurve $\bar{\gamma}$ und zeichne diejenige von $\overline{\mathfrak{p}}_0'$ ausgehende Kurve $\bar{\gamma}'$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$, deren Spurlinie auf $\mathfrak{F}$ mit der Spurlinie von $\bar{\gamma}$ übereinstimmt. Den Endpunkt $\overline{\mathfrak{p}}'$ von $\bar{\gamma}'$ ordne man $\overline{\mathfrak{p}}$ zu. $\overline{\mathfrak{p}}'$ ist von der Wahl der $\overline{\mathfrak{p}}_0$ mit $\overline{\mathfrak{p}}$ verbindenden Kurve $\bar{\gamma}$ wegen der vorausgesetzten Regularität von $\overline{\mathfrak{F}}$ unabhängig. Sind nämlich $\bar{\gamma}$, $\bar{\gamma}_1$ zwei solche Kurven, so ist die Kurve $\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1$, die aus $\bar{\gamma}$ und der rückwärts durchlaufenen Linie $\bar{\gamma}_1$ besteht, geschlossen. Also ist auch die von $\overline{\mathfrak{p}}_0'$ ausgehende Kurve $(\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1)'$, deren Spurlinie mit der von $\bar{\gamma} - \bar{\gamma}_1$ zusammenfällt, *geschlossen*; d. h. $\bar{\gamma}'$ und $\bar{\gamma}_1'$ führen zu demselben Endpunkt $\overline{\mathfrak{p}}'$. — Es ist klar, daß die Repräsentation einer Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ durch eine abstrakte Gruppe Γ in der geschilderten Weise nur für *reguläre* Überlagerungsflächen möglich ist.

Unter allen unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsflächen, die zu einer gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ gehören, gibt es eine, welche die „stärkste“ ist[1]; sie wird durch die Aussage charakterisiert: Eine Kurve $\tilde{\gamma}$ auf ihr ist nur dann geschlossen, wenn alle auf irgendwelchen unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsflächen von $\mathfrak{F}$ gelegenen Kurven, welche dieselbe Spurkurve auf $\mathfrak{F}$ besitzen wie $\tilde{\gamma}$, geschlossen sind. Die **„universelle Überlagerungsfläche“** $\tilde{\mathfrak{F}}$ ist zufolge dieser Eigenschaft *regulär*, und die Gruppe ihrer Decktransformationen, als abstrakte Gruppe betrachtet, ist eine Analysis-situs-Invariante der Grundfläche $\mathfrak{F}$. Außerdem ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ *einfach zusammenhängend*. Denn wäre $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ eine mehr als ein-

1) Poincaré, Bulletin de la société mathématique de France, Bd. 11, 1883, S. 113—114.

blättrige unverzweigte und unbegrenzte Überlagerungsfläche über $\tilde{\mathfrak{F}}$, so könnte man auf $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ eine ungeschlossene Linie ziehen, deren Spurkurve auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ geschlossen ist. Da aber $\tilde{\mathfrak{F}}^*$ auch eine unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}$ ist, widerspricht diese Möglichkeit ohne weiteres der charakteristischen Eigenschaft von $\tilde{\mathfrak{F}}$.

Die universelle Überlagerungsfläche läßt sich z. B. so erklären: Jede von einem festen Punkt $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ ausgehende Kurve γ definiert einen „Punkt von $\tilde{\mathfrak{F}}$“, von dem wir sagen, daß er über dem Endpunkt von γ liegt; zwei solche Kurven γ, γ' definieren dann und nur dann *denselben* Punkt auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, wenn auf jeder unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}$ zwei von demselben Punkt ausgehende Kurven, deren Spurlinien γ, γ' sind, stets in demselben Punkte enden. — γ_0 sei eine Kurve auf $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}$, welche den Punkt $\tilde{\mathfrak{p}}$ auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ definiert, $\mathfrak{U}$ eine Umgebung von $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$. Hänge ich an γ_0 alle möglichen von $\mathfrak{p}$ ausgehenden, in $\mathfrak{U}$ verlaufenden Kurven γ an, so sage ich, die durch alle so entstehenden Kurvenzüge $\gamma_0 + \gamma$ definierten Punkte auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ bildeten eine „Umgebung“ $\tilde{\mathfrak{U}}$ von $\tilde{\mathfrak{p}}$. Über jedem Punkt von $\mathfrak{U}$ liegt, weil $\mathfrak{U}$ einfach zusammenhängend ist, ein einziger Punkt von $\tilde{\mathfrak{U}}$, und infolgedessen erfüllt unser Begriff der „Umgebung“ die an ihn zu stellenden Anforderungen (§ 4). Jede Triangulierung von $\mathfrak{F}$ überträgt sich sogleich auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, sodaß wir ein Recht haben, $\tilde{\mathfrak{F}}$ als „Fläche“ zu bezeichnen[1]).

Jede einfach zusammenhängende Fläche ist schlichtartig. Liegt nämlich auf einer triangulierten Fläche $\mathfrak{F}_\zeta$ ein aus Kanten bestehendes Polygon π, das sie nicht zerlegt, so kann man über $\mathfrak{F}$ in der folgenden Weise stets eine unverzweigte unbegrenzte, zweiblättrige Überlagerungsfläche konstruieren[2]): Jedem Elementardreieck Δ von ζ ordnet man zwei „über Δ liegende Dreiecke“ Δ_1, Δ_2 zu. Sind Δ', Δ'' zwei längs einer dem Polygon π nicht angehörigen Kante zusammenhängende Dreiecke von ζ, so sollen längs der entsprechenden Kante Δ_1' und Δ_1'' miteinander zusammenhängen und ebenso Δ_2' mit Δ_2''. Gehört die gemeinsame Kante von Δ', Δ'' aber dem Polygon π an, so heften wir längs der entsprechen-

1) Ist $\mathfrak{F}$ geschlossen und demgemäß in endlichviele Elementardreiecke zerlegt, so handelt es sich bei der Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{F}}$ nur darum, von jeder der endlichvielen geschlossenen Dreiecksketten auf $\mathfrak{F}$ festzustellen, ob sie sich auch auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ schließt, und dies muß sich natürlich durch ein bestimmtes endliches Verfahren entscheiden lassen. Vgl. die genetische Konstruktion von $\tilde{\mathfrak{F}}$ bei Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven II, Crelles Journal Bd. 139, 1911, S. 271—276.

2) Die Beschreibung der Überlagerungsfläche geschieht nach der in § 5, Beispiel 9 allgemein geschilderten Methode.

den Kante Δ_1' mit Δ_2'' zusammen und Δ_2' mit Δ_1''. — Daß jedes geradlinige Polygon in der Euklidischen Ebene diese zerlegt, ist ein spezieller Fall unseres Satzes, da sich der einfache Zusammenhang der Euklidischen Ebene in genau der gleichen Weise einsehen läßt, wie der einfache Zusammenhang des Kreisinnern.

Es ist von Wichtigkeit, zu entscheiden, wann ein aus endlichvielen Dreiecken zusammengesetztes Gebiet einfach zusammenhängend ist. Auf einer triangulierten Fläche $\mathfrak{F}_\zeta$ sei also ein Gebiet $\mathfrak{P}$ gegeben, das ausschließlich aus Punkten der Elementardreiecke $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ von ζ besteht, aber auch alle inneren Punkte dieser Dreiecke wirklich enthält; eine Kante dieser Dreiecke soll entweder (abgesehen vielleicht von ihren Endpunkten) *ganz* zu $\mathfrak{P}$ gehören [**innere Kante**] oder soll mit *keinem Punkt* zu $\mathfrak{P}$ gehören [**Randkante**]; ein Eckpunkt, von dem nur innere Kanten ausgehn, soll stets innerhalb $\mathfrak{P}$ liegen. Ein solches Gebiet $\mathfrak{P}$ nennen wir ein **Polyeder**, und zwar ein **offenes**, falls es wenigtens eine Randkante besitzt, eine **geschlossenes**, wenn keine Randkanten vorhanden sind. $\mathfrak{P}$ kann nur dann ein geschlossenes Polyeder sein, wenn $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Fläche und $\mathfrak{P}$ mit $\mathfrak{F}$ identisch ist. Ein aus Kanten bestehender einfacher Streckenzug, der bis auf seine beiden nicht innerhalb $\mathfrak{P}$ liegenden Endpunkte ganz zu $\mathfrak{P}$ gehört, werde ein **Querschnitt** genannt. Wenn $\mathfrak{P}$ offen ist und nicht nur aus einem einzigen Dreieck Δ_1 besteht, gibt es Querschnitte in $\mathfrak{P}$ (z. B. bilden eine oder zwei Kanten eines Dreiecks Δ_i, von dem wenigstens eine Kante Randkante ist, einen solchen). Ein Querschnitt zerlegt, wie die in § 8 angestellten Betrachtungen zeigen, $\mathfrak{P}$ entweder gar nicht oder in zwei Gebiete, die dann gleichfalls offene Polyeder sind. *Ist das offene Polyëder $\mathfrak{P}$ einfach zusammenhängend, muß jeder Querschnitt $\mathfrak{P}$ zerlegen;* dies erkennt man genau so, wie oben aus dem einfachen Zusammenhang gefolgert wurde, daß jedes geschlossene Polygon zerlegt. Es gilt hier auch die Umkehrung: *ein offenes Polyeder, das durch jeden Querschnitt zerlegt wird, ist einfach zusammenhängend. (Ein geschlossenes Polyeder, das durch jedes aus Kanten bestehende Polygon zerlegt wird, ist einfach zusammenhängend.)*

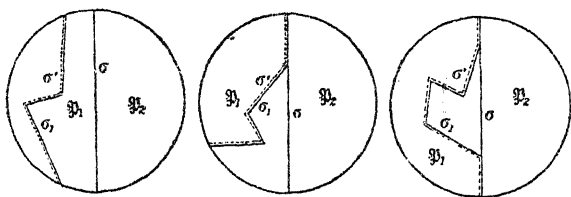



Fig. 13. Querschnitte.

1. $\mathfrak{P}$ sei ein offenes Polyeder, das die Voraussetzung des Satzes erfüllt, und werde durch den Querschnitt σ in $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ zerlegt. Dann erfüllt auch jedes der beiden Polyeder $\mathfrak{P}_1$, $\mathfrak{P}_2$ diese Voraussetzung. Ein beliebiger Querschnitt σ_1 von $\mathfrak{P}_1$ ist nämlich entweder selbst ein Querschnitt σ' in $\mathfrak{P}$ oder läßt sich zu einem solchen durch Hinzufügen eines

oder zweier Streckenzüge, die Teile von σ sind, ergänzen (Fig. 13). Man fasse zwei Dreiecke ins Auge, die längs einer zu σ_1 gehörigen Kante aneinander grenzen, und im Innern jedes dieser Dreiecke einen Punkt $\mathfrak{p}^*$, bzw. $\mathfrak{p}^{**}$. Da $\mathfrak{P}$ durch σ' zerlegt wird, lassen sich $\mathfrak{p}^*$ und $\mathfrak{p}^{**}$ innerhalb $\mathfrak{P}$ ohne Überschreitung von σ' nicht verbinden (S. 45). $\mathfrak{p}^*$, $\mathfrak{p}^{**}$ liegen beide in $\mathfrak{P}_1$, sind aber dem Gesagten zufolge innerhalb $\mathfrak{P}_1$ ohne Überschreitung von σ_1 nicht verbindbar; d. h. $\mathfrak{P}_1$ wird durch σ_1 zerlegt.

2. Wir betrachten eine Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{P}}$ (unverzweigt, unbegrenzt) über $\mathfrak{P}$. Δ_1, Δ_2 seien zwei Dreiecke, die längs einer Kante σ^0 von σ aneinandergrenzen, so daß Δ_1 zu $\mathfrak{P}_1$, Δ_2 zu $\mathfrak{P}_2$ gehört; $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2$ zwei über Δ_1, bzw. Δ_2 liegende Dreiecke auf $\overline{\mathfrak{P}}$ *mit gemeinsamer Kante*. Setzen wir nun voraus, der zu beweisende Satz wäre bereits für Polyeder, die aus weniger Dreiecken bestehen als $\mathfrak{P}$, bewiesen, so schließen wir, daß $\mathfrak{P}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ einfach zusammenhängend sind. Infolgedessen können wir jedem Dreieck Δ von $\mathfrak{P}$ ein darüber gelegenes $\overline{\Delta}$ von $\overline{\mathfrak{P}}$ so zuordnen, daß $\overline{\Delta}_1$ dem Dreieck Δ_1, $\overline{\Delta}_2$ dem Dreieck Δ_2 zugeordnet erscheint und irgend zwei Dreiecken Δ, deren gemeinsame Kante eine innere Kante von $\mathfrak{P}_1$ oder $\mathfrak{P}_2$ ist, stets zwei Dreiecke $\overline{\Delta}$ entsprechen, die gleichfalls eine Kante gemein haben. Ist $\mathfrak{p}_0$ ein Endpunkt von σ^0, ohne Endpunkt des Querschnitts σ zu sein, so liegt über dem Stern $\mathfrak{S}$ der sich um $\mathfrak{p}_0$ gruppierenden Elementardreiecke von $\mathfrak{F}_\zeta$ ($\mathfrak{S}$ gehört ganz zu $\mathfrak{P}$) ein Dreieckszykel $\overline{\mathfrak{S}}$ auf $\overline{\mathfrak{P}}$, der $\overline{\Delta}_1$, $\overline{\Delta}_2$ und über jedem Dreieck Δ von $\mathfrak{S}$ (wegen der Unverzweigtheit von $\overline{\mathfrak{P}}$) ein einziges Dreieck $\overline{\Delta}$ enthält, und dabei kann $\overline{\Delta}$ kein anderes Dreieck sein als eben dasjenige, das durch unsere Zuordnung dem Δ zugewiesen war (s. Figur 14). Ist σ' die im Eckpunkt $\mathfrak{p}_0$ auf σ^0 folgende Kante von σ, Δ_1', Δ_2' die beiden Dreiecke in $\mathfrak{P}_1$, bzw. $\mathfrak{P}_2$ mit der gemeinsamen Kante σ', so folgt daraus, daß die diesen von uns zugeordneten Dreiecke $\overline{\Delta}_1'$, $\overline{\Delta}_2'$ gleichfalls eine Kante gemeinsam haben. Indem wir so, den Querschnitt σ von σ^0 aus nach beiden Richtungen durchlaufend, von Kante zu Kante fortschließen, gelangen wir zu der Einsicht, daß die Dreiecke $\overline{\Delta}$ auch über den Querschnitt σ hinüber miteinander zusammenhängen. Damit ist die Einblättrigkeit von $\overline{\mathfrak{P}}$, also der einfache Zusammenhang von $\mathfrak{P}$ bewiesen. Denn für ein Polyeder, das aus *einem einzigen* Dreieck besteht, kann an der Richtigkeit unseres Satzes nicht gezweifelt werden.

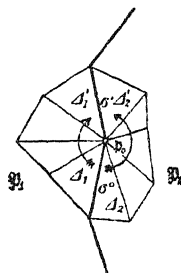



Fig. 14.

Die *Bedeutung der Überlagerungsflächen für die komplexe Funktionentheorie* geht schon daraus hervor, daß jede zu einer *Riemannschen* Fläche $\mathfrak{F}$ gehörige unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ selbst ohne

weiteres eine Riemannsche Fläche ist. Indem man nämlich allen über einem Punkt $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ gelegenen Punkten der Überlagerungsfläche den gleichen Funktionswert zuordnet wie dem Punkte $\mathfrak{p}$, erhält man aus jeder Ortsuniformisierenden $t(\mathfrak{p})$ zu einem Punkte $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ eine bestimmte Ortsuniformisierende t zu jedem der über $\mathfrak{p}_0$ gelegenen Punkte von $\overline{\mathfrak{F}}$, und erhält man zu jeder von wesentlichen Singularitäten freien Funktion auf $\mathfrak{F}$ eine Funktion gleichen Charakters auf $\overline{\mathfrak{F}}$. Jede Funktion auf der *beliebigen* unverzweigten, unbegrenzten Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ erscheint aber wieder als eine eindeutige Funktion auf der *universellen* Überlagerungsfläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, so daß deren Betrachtung geeignet ist, die aller andern nicht so kräftigen Überlagerungsflächen bis zu einem gewissen Grade zu ersetzen. Unter den Funktionen auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ sind die Funktionen f auf der Grundfläche $\mathfrak{F}$ durch die Eigenschaft charakterisiert, daß sie sich gegenüber der Gruppe der Decktransformationen von $\tilde{\mathfrak{F}}$ invariant verhalten; d. h. sie erfüllen die Identität

$$f(\tilde{\mathfrak{p}}) = f(\tilde{\mathfrak{p}}\, T),$$

wenn die Zuordnung $T: \tilde{\mathfrak{p}} \longrightarrow \tilde{\mathfrak{p}}\, T$ irgend eine dieser Decktransformationen ist.

Die funktionentheoretische Ausnutzung des einfachen Zusammenhangs einer Fläche beruht auf dem folgenden *Monodromiesatz:*

Ist $\mathfrak{F}$ eine einfach zusammenhängende Fläche,

$$z = a_{-m} t^{-m} + \cdots + a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots \quad [t = \text{Ortsuniformisierende zu } \mathfrak{p}_0],$$

ein zu einem Punkt $\mathfrak{p}_0$ von $\mathfrak{F}$ als Mittelpunkt gehöriges Funktionselement und stößt man bei der analytischen Fortsetzung von z längs beliebiger Wege auf $\mathfrak{F}$ niemals auf andere kritische Punkte denn auf gewöhnliche Pole, so erhält man durch diese Fortsetzung eine in $\mathfrak{F}$ eindeutige, bis auf Pole regulär-analytische Funktion.

Beweis: In analoger Weise wie die universelle Überlagerungsfläche definiert wurde, kann man eine unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}$ erklären, welche die Eigenschaft besitzt, daß auf ihr eine Kurve, deren Spurlinie auf $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{p}_0$ nach $\mathfrak{p}_0$ zurückläuft, dann und nur dann geschlossen ist, falls Fortsetzung des Funktionselements z längs der Spurlinie zu dem Anfangselement zurückführt. Wegen des vorausgesetzten einfachen Zusammenhangs von $\mathfrak{F}$ muß diese Überlagerungsfläche einblättrig sein. Damit ist bereits der Beweis des Monodromiesatzes erbracht.

Ein spezieller Fall des Monodromiesatzes ist der *Cauchysche Integralsatz.* Um ihn allgemein formulieren zu können, müssen wir von den „Differentialen“ auf einer Riemannschen Fläche sprechen. Während eine „Funktion“ dadurch charakterisiert ist, daß sie an jeder Stelle ihres Definitions-

bereichs einen bestimmten Wert hat, kommt einem **Differential** dz an einer Stelle $\mathfrak{p}$ nicht an sich, sondern nur im Verhältnis zu dem Differential dt einer jeden zu $\mathfrak{p}$ gehörigen Ortsuniformisierenden t ein bestimmter Wert $(dz)_t^{\mathfrak{p}}$ zu; sind t, τ zwei zu derselben Stelle $\mathfrak{p}$ gehörige Ortsuniformisierende, so muß dabei stets

$$(dz)_t^{\mathfrak{p}} = (dz)_\tau^{\mathfrak{p}} \cdot \left(\frac{d\tau}{dt}\right)_{t=}$$

sein. Eine im Gebiet $\mathfrak{G}$ regulär-analytische Funktion z besitzt ein Differential dz, für welches

$$(dz)_t^{\mathfrak{p}} = \left(\frac{dz}{dt}\right)_{t=0}$$

ist, wenn $\mathfrak{p}$ irgend ein Punkt von $\mathfrak{G}$, t irgend eine zu $\mathfrak{p}$ gehörende Ortsuniformisierende bedeutet. Auch eine harmonische Funktion u gibt zu einem Differential dw Veranlassung — gemäß der Formel

$$(dw)_t^{\mathfrak{p}} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{t=0} \qquad [t = x + iy].$$

Durch Multiplikation eines Differentials dz mit einer Funktion f entsteht ein neues Differential dZ:

$$(dZ)_t^{\mathfrak{p}} = f(\mathfrak{p}) \cdot (dz)_t^{\mathfrak{p}}.$$

Ist an einer Stelle $\mathfrak{p}: (dz)_t^{\mathfrak{p}} = 0$ für *eine* zu $\mathfrak{p}$ gehörige Ortsuniformisierende t, so ist dies für *jede* Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}$ der Fall; $\mathfrak{p}$ ist dann eine **Nullstelle** von dz. Sind dZ, dz zwei in demselben Gebiet $\mathfrak{G}$ erklärte Differentiale und besitzt dz nirgendwo eine Nullstelle, so ist $\frac{dZ}{dz} = f$ eine Funktion in $\mathfrak{G}$;

$$\frac{(dZ)_t^{\mathfrak{p}}}{(dz)_t^{\mathfrak{p}}} = f(\mathfrak{p})$$

ist nämlich von der Wahl der Ortsuniformisierenden t unabhängig.

Gibt es eine Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}_0$ (mit der Ortsuniformisierenden t), in der dz und dt existieren, $dt \neq 0$ und $\frac{dz}{dt}$ regulär-analytisch ist, so heißt dz an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ **regulär-analytisch.** Hat $\frac{dz}{dt}$ eine Nullstelle m^{ter} Ordnung für $t = 0$, so sagen wir auch von dem Differential dz, es habe in $\mathfrak{p}_0$ eine **Nullstelle** m^{ter} **Ordnung** (oder sei von der Ordnung m); hat $\frac{dz}{dt}$ einen Pol n^{ter} Ordnung (dz ist dann in der Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ mit Ausschluß dieses Punktes selbst definiert), so sagen wir, dz habe in $\mathfrak{p}_0$ einen **Pol** n^{ter} **Ordnung** (oder sei von der Ordnung $-n$). Diese Ordnungszahlen sind von der Wahl der Ortsuniformisierenden t

unabhängig. Das Gleiche gilt von dem **Residuum**[1]) des Differentials dz an der Stelle $\mathfrak{p}_0$, d. i. dem Koeffizienten A_{-1} der Entwicklung

$$\frac{dz}{dt} = A_{-n}t^{-n} + \cdots + A_{-1}t^{-1} + A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \cdots$$

Das Differential einer bis auf Pole regulären Funktion ist selbst, abgesehen von Polen, regulär analytisch und hat nirgendwo ein von 0 verschiedenes Residuum. Die Umkehrung dieses Satzes, soweit sie richtig ist, bildet den Inhalt des Cauchyschen Integralsatzes in seiner allgemeinen Formulierung.

Ist dz ein in einem einfach zusammenhängenden Gebiet $\mathfrak{G}$ bis auf Pole reguläres Differential, das nirgendwo ein Residuum $\neq 0$ besitzt, so gibt es eine, abgesehen von Polen, reguläre eindeutige Funktion z, deren Differential mit dem gegebenen dz in ganz $\mathfrak{G}$ übereinstimmt.

Beweis: $\mathfrak{p}_0$ sei eine Stelle in $\mathfrak{G}$, an der sich dz regulär verhält, und es gelte mit Bezug auf eine zu $\mathfrak{p}_0$ gehörige Ortsuniformisierende t für hinreichend kleine t die Entwicklung

$$\frac{}{dt} = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 +$$

Dann bilde man das Funktionselement

$$z = A_0 t + A_1 \frac{t^2}{2} + A_2 \frac{t^3}{3} + \cdots.$$

Dieses Element gestattet auf jeder von $\mathfrak{p}_0$ ausgehenden, in $\mathfrak{G}$ verlaufenden Kurve γ eine analytische Fortsetzung, bei der man auf keine andern kritischen Punkte als auf Pole stößt (mit Hilfe dieser analytischen Fortsetzung definieren wir das Integral $\int_\gamma dz$), und so erhält man nach dem Monodromiesatz eine eindeutige Funktion z in $\mathfrak{G}$ von der gewünschten Beschaffenheit.

§ 10. Einseitigkeit und Zweiseitigkeit von Flächen. Der Residuensatz.

Es sei in der Euklidischen Ebene eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$ mit bestimmtem Durchlaufungssinn gegeben, ferner ein nicht auf $\mathfrak{C}$ gelegener Punkt O und in dem Büschel der Halbgeraden durch O (kürzer: in O) ein bestimmter Drehungssinn $\mathfrak{D}$. Verfolgen wir, während der variable Punkt P die Kurve $\mathfrak{C}$ einmal im vorgeschriebenen Sinne durchläuft, die stetige Änderung des Winkels φ, den die Strecke OP mit einer festen Halbgeraden durch O bildet, so wird die Differenz
«Wert von φ am Ende — Wert von φ am Anfang der Durchlaufung» ein ganzzahliges Vielfaches $2n\pi$ von 2π sein; die ganze Zahl n heißt die **Ordnung** von O in Bezug auf $\mathfrak{C}$, in Zeichen

1) Man muß durchaus daran festhalten, daß das Residuum etwas ist, was einem *Differential*, nicht einer *Funktion* zukommt.

$$n = \underset{\mathfrak{C}}{\operatorname{ord}}(O).$$

Diese Zahl n hängt, außer von dem Punkte O und der in bestimmter Weise durchlaufenen Kurve $\mathfrak{C}$, noch von dem Drehungssinn $\mathfrak{d}$ in O ab; ersetzen wir diesen durch den entgegengesetzten, so wechselt n sein Vorzeichen.

Die Möglichkeit, auf einer beliebigen Fläche einen Drehungssinn festzulegen, beruht auf dem folgenden fundamentalen Satz:

Ist ein Gebiet $\mathfrak{G}$ der Euklidischen Ebene auf ein ebensolches Gebiet $\mathfrak{G}'$ umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig abgebildet, wobei dem Punkte O von $\mathfrak{G}$ der Punkt O' entsprechen möge; ist ferner in O ein bestimmter Drehungssinn $\mathfrak{d}$ gegeben, so kann man in O' einen Drehungssinn $\mathfrak{d}'$ so festlegen, daß die Ordnung des Punktes O in Bezug auf jede nicht durch O gehende, in $\mathfrak{G}$ verlaufende geschlossene Kurve mit der Ordnung von O' in Bezug auf die Bildkurve übereinstimmt.

Zum Beweise benutzen wir einen festen Kreis $\mathfrak{k}$ in $\mathfrak{G}$ mit dem Mittelpunkt O (x, y bedeuten Cartesische Koordinaten):

$$x = a\cos 2\pi\lambda, \quad y = a\sin 2\pi\lambda \quad [0 \leqq \lambda \leqq 1];$$

in Bezug auf $\mathfrak{k}$ besitzt O die Ordnung 1. Wir entscheiden uns in O' zunächst willkürlich für einen der beiden möglichen Drehsinne, und nennen dann n_0 die Ordnung von O' in Bezug auf die Bildkurve $\mathfrak{k}'$ von $\mathfrak{k}$. Der Beweis zerfällt in zwei Teile:

1. Ist $\mathfrak{C}$ eine beliebige geschlossene Kurve in $\mathfrak{G}$, die nicht durch O geht, $n = \underset{\mathfrak{C}}{\operatorname{ord}}(O)$, so ist

$$\underset{\mathfrak{C}'}{\operatorname{ord}}(O') = n \cdot n_0$$

2. $\qquad n_0$ ist $+1$ oder -1.

Beweis von 1.:

$$x = x(\lambda), \quad y = y(\lambda) \quad [0 \leqq \lambda \leqq 1]$$

sei die Kurve $\mathfrak{C}$; wir teilen sie so in Teilbögen ein

$$0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1, \quad \lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2, \cdots, \quad \lambda_{r-1} \leqq \lambda \leqq 1,$$

daß auf jedem dieser Teilbögen die Wertschwankungen des Azimuts φ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ bleiben. $P_0, P_1, \ldots, P_{r-1}$ seien die den Werten $0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{r-1}$ entsprechenden Kurvenpunkte. Verfolgen wir also die stetige Änderung des Winkels $\varphi = \varphi(\lambda)$, den OP mit einer festen durch O gehenden Halbgeraden einschließt, während P den h^{ten} Bogen $\mathfrak{C}_h$: $\lambda_{h-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_h$ durchläuft, so kommen niemals zwei φ-Werte vor, deren Unterschied absolut $\geqq \frac{\pi}{2}$ wäre. $\mathfrak{C}_h$ ordnen wir den durch die Halbgeraden OP_{h-1}, OP_h aus $\mathfrak{k}$ ausgeschnittenen Kreisbogen $\mathfrak{k}_h$: $Q_{h-1}Q_h$ zu und bringen ihn mit Hilfe

eines Parameters λ so zur Darstellung: $x = x_h(\lambda)$, $y = y_h(\lambda)$, daß wenn λ monoton von λ_{h-1} bis λ_h wächst, der zugeordnete Punkt (xy) jenen Kreisbogen monoton von Q_{h-1} nach Q_h durchläuft. Die Verbindungsstrecke eines Punktes P auf $\mathfrak{C}_h$ mit einem Punkte Q auf $\mathfrak{k}_h$ enthält niemals den Punkt O; denn dann würden die Halbgeraden OP, OQ den Winkel π miteinander einschließen, was unmöglich ist.

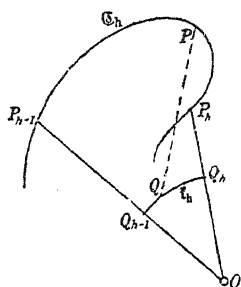



Fig. 15.

$$\mathfrak{K} = \mathfrak{k}_1 + \mathfrak{k}_2 + \cdots + \mathfrak{k}_r$$

ist eine geschlossene Kurve, die den Kreis $\mathfrak{k}$ stückweis monoton und im ganzen n-mal umläuft. Die Bildkurve $\mathfrak{K}'$ von $\mathfrak{K}$ umläuft demnach stückweis monoton und im ganzen n-mal $\mathfrak{k}'$; infolgedessen hat O' mit Bezug auf $\mathfrak{K}'$ die Ordnung $n \cdot n_0$.

Ist μ eine Zahl $\geqq 0$ und $\leqq 1$, so stellen die Gleichungen

$$\begin{aligned} x &= \mu x(\lambda) + (1-\mu)\, x_h(\lambda) \\ y &= \mu y(\lambda) + (1-\mu)\, y_h(\lambda) \end{aligned} \qquad (\lambda_{h-1} \leqq \lambda \leqq \lambda_h) \quad h = 1, 2,$$

eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}_\mu$ dar, die nicht durch O hindurchgeht, deren Bildkurve $\mathfrak{C}'_\mu$ also nicht durch O' hindurchgeht. Bezeichnen wir mit n'_μ die Ordnung von O' in Bezug auf $\mathfrak{C}'_\mu$, so variert infolgedessen und weil $\mathfrak{C}'_\mu$ stetig von μ abhängt, n'_μ stetig mit μ, muß aber immer eine ganze Zahl sein und ist demnach konstant für $0 \leqq \mu \leqq 1$. Für $\mu = 1$ ist $\mathfrak{C}_\mu = \mathfrak{C}$ und stimmt für $\mu = 0$ mit der Kurve $\mathfrak{K}$ überein. Darum muß

$$\underset{\mathfrak{C}'}{\mathrm{ord}}\,(O') = \underset{\mathfrak{K}'}{\mathrm{ord}}\,(O') = n \cdot n_0$$

sein.

Beweis von 2.: Ist $\mathfrak{E}$ eine abgeschlossene Menge in der Euklidischen Ebene und P irgend ein nicht zu $\mathfrak{E}$ gehöriger Punkt, so nennen wir die Gesamtheit der mit P durch stetige, $\mathfrak{E}$ nicht treffende Kurven verbindbaren Punkte ein **durch $\mathfrak{E}$ bestimmtes Gebiet.** Zwei durch $\mathfrak{E}$ bestimmte Gebiete sind entweder völlig identisch oder haben keinen einzigen Punkt gemein. Die **Grenze** eines Gebietes wird von allen Punkten gebildet, die ohne dem Gebiete selbst anzugehören, Verdichtungsstellen von Punkten des Gebietes sind. Die Grenze eines durch $\mathfrak{E}$ bestimmten Gebietes $\mathfrak{G}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{E}^*$ von $\mathfrak{E}$. $\mathfrak{G}$ ist dann auch eines der durch $\mathfrak{E}^*$ bestimmten Gebiete.

Hieraus geht für $\mathfrak{k}'$ hervor: Die geschlossene Kurve $\mathfrak{k}'$ bestimmt in der Ebene zwei Gebiete; das eine, $\mathfrak{J}$, welches wir das innere nennen, besteht aus allen Bildpunkten der innerhalb $\mathfrak{k}$ gelegenen Punkte; das andere, das „äußere“, $\mathfrak{A}$, enthält alle weitentfernten Punkte der Ebene. Als „weit entfernt“ haben diejenigen Punkte der Ebene zu gelten, die außerhalb eines Kreises um O' liegen, der die ganze Kurve $\mathfrak{k}'$ im Innern enthält.

Jeder Punkt von $\mathfrak{k}'$ gehört sowohl zur Grenze von $\mathfrak{J}$ als von $\mathfrak{A}$. Ein Teilbogen von $\mathfrak{k}'$ bestimmt nur ein einziges Gebiet.

In jedem Punkte der Ebene legen wir zur Bestimmung seiner Ordnung in Bezug auf $\mathfrak{k}'$ *denselben* Drehungssinn zugrunde. Läßt man dann einen Punkt in der Ebene stetig wandern, ohne daß er $\mathfrak{k}'$ trifft, so muß sich seine Ordnung in Bezug auf $\mathfrak{k}'$ stetig ändern und also konstant bleiben. Sowohl für alle Punkte von $\mathfrak{A}$ als für alle Punkte von $\mathfrak{J}$ existiert daher eine konstante Ordnung; dieselbe ist für $\mathfrak{A}$: $= 0$, da die weitentfernten Punkte gewiß die Ordnung 0 in Bezug auf $\mathfrak{k}'$ haben. Von den Punkten von $\mathfrak{J}$ behaupten wir, daß ihre Ordnung $= \pm 1$ ist.

Durch O' legen wir eine Gerade. Verfolgen wir diese von O' aus nach beiden Seiten, so müssen wir in beiden Richtungen zum ersten Mal auf einen Punkt von $\mathfrak{k}'$ treffen. Die beiden so erhaltenen Punkte E, F von $\mathfrak{k}'$ zerlegen diese Kurve in zwei Teilbogen. Der eine von ihnen, $\mathfrak{k}_1'$, bildet zusammen mit der geradlinigen Strecke $\overrightarrow{FE}$ eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}_1$, der andere, $\mathfrak{k}_2'$, mit der Strecke $\overrightarrow{EF}$ eine zweite geschlossene Kurve $\mathfrak{C}_2$. Die Strecke EF kreuzen wir im Punkte O' durch eine kleine auf EF senkrechte Strecke $O_1 O_2$, die ganz in $\mathfrak{J}$ liegt. Die Ordnung eines Punktes P in Bezug auf $\mathfrak{C}_1$ springt offenbar um ± 1, wenn P, die Strecke $O_1 O_2$ monoton durchlaufend, O' passiert[1]):

Fig. 16. Gebietsteilung durch die Kurve $\mathfrak{k}'$.

$$\underset{\mathfrak{C}_1}{\text{ord}}\,(O_1) - \underset{\mathfrak{C}_1}{\text{ord}}\,(O_2) = \pm 1.$$

Da $\mathfrak{C}_1$, aus einem die Ebene nicht zerlegenden Teilbogen von $\mathfrak{k}'$ und einer geradlinigen Strecke bestehend, die Ebene in höchstens zwei Gebiete $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{A}_1$ zerlegen kann, muß O_1 oder O_2 demjenigen dieser beiden Gebiete $\mathfrak{A}_1$ angehören, in welchem die weitentfernten Punkte der Ebene liegen; einer der beiden Punkte O_1, O_2, etwa O_2, muß also in Bezug auf $\mathfrak{C}_1$ die Ordnung 0 haben; dann hat O_1 in bezug auf $\mathfrak{C}_1$ die Ordnung ± 1 und liegt in dem anderen der beiden durch $\mathfrak{C}_1$ bestimmten Gebiet $\mathfrak{J}_1$.

Ebenso erkennt man, daß $\mathfrak{C}_2$ die Ebene in zwei Gebiete $\mathfrak{J}_2$, $\mathfrak{A}_2$ zerlegt, von denen $\mathfrak{A}_2$ die weitentfernten Punkte der Ebene enthalten möge, und daß ferner einer der beiden folgenden Fälle eintreten muß:

1) $\quad \underset{-}{\text{ord}}\,(O_1) = 0, \quad \underset{-}{\text{ord}}\,(O_2) = \pm 1; \quad O_1$ liegt in $\mathfrak{A}_2$;

1) Denn der Winkel, unter dem die Strecke $\overrightarrow{FE}$ von P aus erscheint, konvergiert gegen $+\pi$ oder $-\pi$, je nachdem P von O_1 aus oder von O_2 aus gegen O' rückt; die gesamte Winkeländerung aber, die ein durch P gehender Strahl erleidet, dessen anderer Endpunkt die Kurve $\mathfrak{k}_1'$ beschreibt, hängt stetig von P ab, auch an der Stelle $P = O'$.

2) $\underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_1) = \pm 1, \quad \underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_2) = 0; \quad O_2$ liegt in $\mathfrak{A}_2$.

Im Falle 1) ergäbe sich in Übereinstimmung mit unserer Behauptung

$$\underset{\mathfrak{C}}{\mathrm{ord}}(O_1) = \underset{\mathfrak{C}_1}{\mathrm{ord}}(O_1) + \underset{\mathfrak{C}_2}{\mathrm{ord}}(O_1) = \pm 1 .$$

Wir zeigen jetzt, daß 2) unmöglich ist.

Die Punkte von $\mathfrak{k}_2'$ liegen, wenn wir von den Endpunkten E, F absehen, in $\mathfrak{A}_1$. Denn in beliebiger Nähe eines Punktes Q von $\mathfrak{k}_2'$ finden sich Punkte von $\mathfrak{A}$, und diese sind mit den weitentfernten Punkten der Ebene durch stetige Kurven verbindbar, welche $\mathfrak{k}'$ nicht treffen, also ganz in $\mathfrak{A}$ verlaufen, und daher auch die Strecke EF und $\mathfrak{k}_1' + EF = \mathfrak{C}_1$ nicht treffen. In beliebiger Nähe von Q finden sich also Punkte, die zu $\mathfrak{A}_1$ gehören, und da der Punkt Q nicht auf $\mathfrak{C}_1$ liegt, muß daher Q selbst in $\mathfrak{A}_1$ liegen. $\mathfrak{J}_1$ besteht aus allen Punkten J, die mit O_1 durch Kurven $\mathfrak{c}$ verbindbar sind, die $\mathfrak{C}_1$ nicht treffen. $\mathfrak{c}$ liegt selbst ganz in $\mathfrak{J}_1$, und da $\mathfrak{k}_2'$ außer seinen Endpunkten in $\mathfrak{A}_1$ liegt, trifft $\mathfrak{c}$ auch $\mathfrak{k}_2'$ nicht, also auch nicht $\mathfrak{k}_2' + EF = \mathfrak{C}_2$. Träte jener zweite Fall ein, so läge O_1 gleichzeitig in $\mathfrak{J}_2$, und es würde, da $\mathfrak{c}$ die Kurve $\mathfrak{C}_2$ nicht trifft, auch J in $\mathfrak{J}_2$ liegen. Jeder Punkt von $\mathfrak{J}_1$ wäre demnach ein Punkt von $\mathfrak{J}_2$. Ebenso erkennt man das Umgekehrte; demnach wäre $\mathfrak{J}_1$ identisch mit $\mathfrak{J}_2$. $\mathfrak{k}_2'$ gehört, abgesehen von den Endpunkten, nicht zur Grenze von $\mathfrak{J}_1$, ebensowenig $\mathfrak{k}_1'$ zur Grenze von $\mathfrak{J}_2$. Ist nun $\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2$, so kann danach die Grenze von $\mathfrak{J}_1$ nur aus Punkten der Strecke EF bestehen. Das ist aber widersinnig, da die Strecke EF die Ebene nicht zerlegt. Die Unhaltbarkeit der Annahme 2) ist erwiesen. (S. die Zusätze am Schluß des Buches.)

Der durch den Fundamentalsatz zu Anfang dieses Paragraphen festgelegte Drehungssinn $\mathfrak{d}'$ heiße der **Bild-Drehungssinn** von $\mathfrak{d}$ bei der Abbildung S' des Gebietes $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$: $\mathfrak{d}$ **„geht“ durch die Abbildung** S' **„über“ in** $\mathfrak{d}'$. Hat man $\mathfrak{G}$ durch eine umkehrbar-eindeutige und -gebietsstetige Abbildung S' auf $\mathfrak{G}'$, durch eine andere solche Abbildung S'' auf $\mathfrak{G}''$ abgebildet, so geht der durch S' erzeugte Bilddrehungssinn $\mathfrak{d}' = \mathfrak{d}\,S'$ von $\mathfrak{d}$ in den durch S'' erzeugten Bilddrehungssinn $\mathfrak{d}'' = \mathfrak{d}\,S''$ über durch die Abbildung $S'^{-1}S''$, welche $\mathfrak{G}'$ in $\mathfrak{G}''$ transformiert.

Diese Tatsachen genügen, um die Möglichkeit zu erkennen, in einem beliebigen Punkte $\mathfrak{p}_0$ einer gegebenen Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ einen Drehungssinn $\mathfrak{d}$ festzulegen. Bei jeder umkehrbar-eindeutigen und gebietsstetigen Abbildung S einer Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ auf ein Gebiet der Euklidischen Ebene, bei welcher $\mathfrak{p}_0$ in O übergehe, wird $\mathfrak{d}$ sich in einem in O herrschenden Bilddrehungssinn $\mathfrak{d}\,S$ kundgeben. Hat man zwei solche Abbildungen S und T, so existiert stets eine Umgebung von $\mathfrak{p}_0$, von der beide Abbildungen ein umkehrbar-eindeutiges und -gebietsstetiges Bild in der Euklidischen Ebene entwerfen. Die Bilddrehungssinne $\mathfrak{d}\,S$, $\mathfrak{d}\,T$ müssen von solcher Art sein, daß $\mathfrak{d}\,S$ durch die Abbildung $S^{-1}T$ übergeht in $\mathfrak{d}\,T$.

(Die explizite Angabe eines Drehungssinnes λ kann natürlich nur „bildlich“ dadurch geschehen, daß man für irgendeine *bestimmte* Abbildung S den Bilddrehungssinn λS in der Euklidischen Ebene gibt).

Legt man in irgend zwei Punkten der Ebene O_1, O_2 den *gleichen* Drehungssinn $\lambda_1 = \lambda_2$ zur Bestimmung der Ordnung dieser Punkte zugrunde, so macht sich das darin bemerkbar, daß O_1, O_2 sicher immer dann in Bezug auf eine geschlossene ebene Kurve $\mathfrak{C}$ die gleiche Ordnung besitzen, falls sich O_1, O_2 durch eine $\mathfrak{C}$ nicht treffende Kurve verbinden lassen. Liegen O_1, O_2 in einem Gebiet $\mathfrak{G}$, das durch eine umkehrbar-eindeutige und -gebietsstetige Abbildung S' in $\mathfrak{G}'$ übergeführt wird, so zeigt diese Bemerkung, wenn wir sie auf Kurven $\mathfrak{C}$ anwenden, die in $\mathfrak{G}$ liegen, daß aus $\lambda_1 = \lambda_2$

$$\lambda_1 S' = \lambda_2 S'$$

folgt. Danach ergibt sich naturgemäß folgende Definition:

Ist in jedem Punkte einer Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ ein Drehungssinn λ festgelegt, so heißt derselbe im Punkt $\mathfrak{p}_0$ **stetig**, *falls es eine Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ gibt derart, daß, wenn diese irgendwie umkehrbar-eindeutig und -gebietsstetig auf ein ebenes Gebiet abgebildet wird, der Bildsinn von λ in allen Punkten dieses Gebietes derselbe ist.*

Und nur dann, wenn λ überall stetig ist, wird man sagen, daß auf der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}$ ein **einheitlicher Drehungssinn** definiert ist. Wenn eine solche „einheitliche“ Festlegung eines Drehungssinnes auf $\mathfrak{F}$ möglich ist, heißt $\mathfrak{F}$ **zweiseitig** (Beispiele: Euklidische Ebene, Kugel, Torus), sonst **einseitig**[1]) (Beispiele: projektive Ebene, Möbiussches Band). Eine geschlossene Kurve auf $\mathfrak{F}$ kann von zweierlei Art sein: gehe ich von einem bestimmten Drehungssinn λ in einem Punkte der Kurve aus und setze diesen längs der Kurve stetig fort, so komme ich in dem Anfangspunkt entweder mit demselben oder dem entgegengesetzten Drehungssinn an. Auf zweiseitigen Flächen gibt es nur Kurven der ersten Art, auf einseitigen sowohl Kurven der ersten als der zweiten Art. Daraus erklären sich die Namen. Daß sich der Drehungssinn längs einer Kurve zweiter Art umkehrt, äußert sich nämlich an einer einseitigen Raumfläche wie dem Möbiusschen Bande darin, daß ich, längs dieser Kurve wandernd, von der einen „Seite“ der Fläche auf die andere gelange, so daß die Fläche in Wahrheit gar nicht zwei getrennte „Seiten“ hat. Über jeder einseitigen Fläche $\mathfrak{F}$ existiert eine unverzweigte, unbegrenzte, zweiblättrige, zweiseitige Überlagerungsfläche, auf der eine Kurve dann und nur dann geschlossen ist, falls ihre Spurkurve auf $\mathfrak{F}$ geschlossen und außerdem von der ersten Art ist. Die beiden Blätter dieser Überlagerungsfläche kann man als die eine und die andere „Seite“ von $\mathfrak{F}$ betrachten.

1) Diese Definition der Einseitigkeit wurde von Klein, Math. Ann. Bd. 9 (1876), S. 479 gegeben.

Wir denken uns jetzt die Fläche $\mathfrak{F}$, von der wir annehmen wollen, daß sie zweiseitig ist und also auf ihr ein einheitlicher Drehungssinn festgelegt ist, in einer bestimmten Triangulierung ζ vorliegend. Ein Dreieck Δ dieser Triangulierung mit den Ecken 1, 2, 3 ist dadurch auf ein ebenes gleichseitiges Dreieck D abgebildet, daß man die Koordinatenverhältnisse $\xi_1 : \xi_2 : \xi_3$, welche den Punkten von Δ entsprechen, mit den homogenen (in bezug auf die Ecken von D gebildeten) Schwerpunktskoordinaten der Bildpunkte in D identifiziert. Diese Abbildung S ist für das Innere von Δ und D umkehrbar-gebietsstetig. ϑ erzeugt also in allen inneren Punkten von D einen bestimmten Bilddrehungssinn ϑS, und zwar in allen Punkten denselben; dieser aber induziert in der aus der Figur hervorgehenden Weise einen bestimmten Umlaufssinn auf dem Rande von D und damit eine bestimmte zyklische Eckenreihenfolge oder **Indikatrix** von D bzw. Δ: entweder

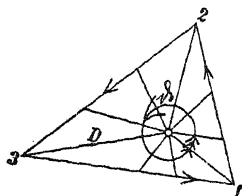



Fig. 17. Drehungssinn und Indikatrix.

$$(1\,2\,3) = (2\,3\,1) = (3\,1\,2)$$

oder

$$(2\,1\,3) = (1\,3\,2) = (3\,2\,1).$$

Nachdem man so für jedes Dreieck Δ der Triangulierung eine bestimmte Indikatrix erhalten hat, betrachte ich zwei solche Dreiecke Δ_3 mit den Ecken 123 und Δ_4 mit den Ecken 124, die längs der Kante 12 aneinandergrenzen. Ich behaupte: bei der mit der vorgegebenen Indikatrix erfolgenden Umlaufung von Δ_3 wird die Kante 12 in *entgegengesetzter* Richtung durchlaufen, wie bei der durch die Indikatrix vorgeschriebenen Umlaufung von Δ_4. Ich drücke das kurz dadurch aus, daß ich sage, die Indikatrix von Δ_3 ist mit der von Δ_4 **kohärent.** Man zeichne in der Ebene zwei gleichseitige Dreiecke $D_3 = (123)$, $D_4 = (124)$, die mit der Kante 12 aneinanderstoßen. Δ_3 ist durch die Koordinatenverhältnisse seiner Punkte auf D_3 stetig abgebildet (die Abbildung heiße S_3) und Δ_4 auf D_4 (Abbildung S_4). Dabei entsprechen sich die mit gleichen Ziffern bezeichneten Ecken. Die gemeinsame Kante von Δ_3, Δ_4 ist zweimal, sowohl durch S_3 als durch S_4, auf die gemeinsame Kante von D_3, D_4 abgebildet. Für diese Kante ist $S_4^{-1} S_3$ eine umkehrbar-eindeutige stetige Abbildung, bei der jedes der beiden Enden in sich übergeht. Ich wähle einen Punkt $\mathfrak{p}$ auf der Kante 12 (der keiner der Endpunkte ist), einen Punkt $\mathfrak{p}_3$ im Innern von Δ_3, einen Punkt $\mathfrak{p}_4$ im Innern von Δ_4:

$$p_3 = \mathfrak{p}_3 S_3, \quad p_4 = \mathfrak{p}_4 S_4; \quad p^3 = \mathfrak{p} S_3, \quad p^4 = \mathfrak{p} S_4.$$

Man kann D_4 leicht so umkehrbar eindeutig und stetig auf sich selbst abbilden (Abbildung s_4), daß jede von p^4 ausgehende Strecke $p^4 p$ (p am Rande von D_4) in die Strecke $p^3 p$ übergeht, auf der Kante 12 aber s_4 mit $S_4^{-1} S_3$ übereinstimmt. Durch Figur 18 wird eine solche Abbildung angedeutet. Dann wird durch diejenige Abbildung T_3, welche für Δ_3: $= S_3$, für Δ_4: $= S_4 s_4$

ist, das Innere von $\Delta_3 + \Delta_4$ umkehrbar-eindeutig und -gebietsstetig auf das Innere des Rhombus $D_3 + D_4$ abgebildet. Analog werde eine Abbildung T_4 konstruiert, die für Δ_4 mit S_4 übereinstimmt. $T_3^{-1} T_4$ ist eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung des Rhombus $D_3 + D_4$ in sich, bei der das geradlinige Strahlenbüschel durch den Punkt p^3 in das geradlinige Strahlenbüschel durch den Punkt p^4 übergeht und jeder Punkt auf dem Rande des Rhombus festbleibt. Man zeichne das Bild $\circlearrowleft T_3$ des in den Punkten $\mathfrak{p}_3$ und $\mathfrak{p}$ herrschenden Drehungssinnes $\circlearrowleft$. Es ist dann $\circlearrowleft T_3$ in p^3 derselbe Drehungssinn wie in p_3. Der Endpunkt eines beweglichen Strahles durch den Punkt p_3 oder p^3, der um diesen mit dem Drehsinn $\circlearrowleft T_3$ herumkreist, durchlaufe den Rand des Rhombus etwa in der Richtung 13241. Durch die Abbildung $T_3^{-1} T_4$ geht $\circlearrowleft T_3$ im Punkte p^3 über in $\circlearrowleft T_4$ im Punkte p^4. Demnach beschreibt der Endpunkt eines beweglichen Strahles durch p^4, der um diesen Punkt im Drehsinn $\circlearrowleft T_4$ kreist, offenbar den Rhombus gleichfalls in der Richtung 13241. Das Gleiche gilt infolgedessen auch für einen Strahl durch p_4, der diesen Punkt mit dem Drehsinn $\circlearrowleft T_4$ umkreist. $\circlearrowleft T_3 = \circlearrowleft S_3$ in p_3 ist aber maßgebend für die Indikatrix von D_3, $\circlearrowleft T_4 = \circlearrowleft S_4$ in p_4 maßgebend für die Indikatrix von D_4; in dem angenommenen Fall wäre (321) die Indikatrix von D_3, (412) diejenige von D_4.

Fig. 18. Abbildung eines Dreiecks D_4 auf sich selbst.

Ein einheitlicher Drehsinn $\circlearrowleft$ auf der triangulierten Fläche $\mathfrak{F}_\zeta$ induziert also in jedem Elementardreieck Δ von ζ eine Indikatrix, die für je zwei aneinanderstoßende Dreiecke miteinander kohärieren. Unsere Überlegung liefert aber sofort auch das umgekehrte Resultat: Wenn jedem Dreieck Δ von ζ eine Indikatrix so zugeordnet ist, daß dieselben für je zwei aneinanderstoßende Dreiecke kohärieren, so ist dadurch ein einheitlicher Drehsinn $\circlearrowleft$ auf $\mathfrak{F}$ festgelegt, der in jedem Δ die betreffende Indikratix induziert.[1]) Eine zweiseitige Fläche $\mathfrak{F}_\zeta$ vermag man also daran zu erkennen, daß es möglich ist, jedem Δ eine solche Indikatrix zuzuweisen, daß je zwei aneinanderstoßenden Dreiecken Indikatrizen zukommen, die miteinander in Kohärenz stehen.

1) Durch diese Eigenschaft, daß man allen Elementardreiecken kohärente Indikatrizen erteilen kann, definieren Möbius (1865; Werke Bd. II, S. 477 u. 482) und auch Brouwer (Math. Ann. Bd. 71, S. 101) die zweiseitigen Flächen. Den Nachweis dafür, daß diese Eigenschaft einer Fläche unabhängig von der Art ihrer Triangulation zukommt, erbringt Brouwer, Math. Ann. Bd. 71, S. 324 (Fußnote) in anderer Weise, als es hier geschehen ist; sein Beweis ist auch für n-dimensionale Mannigfaltigkeiten gültig.

muliert sich streng so: Kein einziges derjenigen Gebiete auf $\mathfrak{F}$, welche π enthalten, wird durch π zerlegt. Es geht daraus hervor, daß schlichtartige Flächen stets zweiseitig sind.

Umgekehrt: *auf einer zweiseitigen Fläche kann es nie vorkommen, daß ein Polygon π keine getrennten Ufer besitzt.* Indem wir ζ, wenn nötig, durch eine Unterteilung ersetzen, können wir annehmen, daß π aus lauter Kanten besteht. Die Ecken von π seien, in dieser Reihenfolge,

$$1, 2, 3, 4, \cdots, n, n+1 = 1, \cdots$$

Da die Fläche zweiseitig sein soll, kommt jedem Dreieck eine bestimmte Indikatrix zu, und diese kohärieren miteinander. Unter den beiden Dreiecken mit der Kante 12 ist eines, bei dessen durch die Indikatrix vorgeschriebenen Umlaufung die Kante $\overrightarrow{12}$ in der Pfeilrichtung durchlaufen wird. Es heiße Δ^0. Von Δ^0 ausgehend, bilde ich in der durch die Figur veranschaulichten Weise die Dreiecke $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \cdots$, die alle an π grenzen und von denen je zwei aufeinanderfolgende eine nicht zu π gehörige Kante gemein haben. Diejenigen Dreiecke dieser Kette, welche eine auf π liegende Kante $h, h+1$ besitzen, tragen eine solche Indikatrix, daß bei der durch sie bestimmten Umlaufung die Kante $\overrightarrow{h, h+1}$ in der Pfeilrichtung beschrieben wird. {Man erkennt das in der Figur z. B. für Δ^3, indem man die Indikatrix von Δ^0 durch die Bedingung der Kohärenz in der Kette $\Delta^0 \Delta^1 \Delta^2 \Delta^3$ fortsetzt.} Nach endlich vielen Schritten komme ich zum erstenmal wieder zu einem Dreieck, das 12 als Kante besitzt. Dessen Indikatrix muß lauten: $(1\,2\,*)$; es kann demnach nur das Dreieck Δ^0 und nicht das andere Dreieck Δ^0_* mit der Kante 12 sein, da dies die Indikatrix $(2\,1\,*)$ besitzt. Die so aus Δ^0 gewonnene Dreieckskette bildet das eine Ufer von π, die in ähnlicher Weise aus dem anderen Dreieck Δ^0_* mit der Kante 12 abzuleitende Kette das andere Ufer.

Fig. 20. Linkes Ufer eines Polygons.

Jede Riemannsche Fläche ist zweiseitig.

Es sei $\mathfrak{p}_0$ ein Punkt einer Riemannschen Fläche, t', t'' zwei beliebige Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}_0$, welche eine gewisse Umgebung von $\mathfrak{p}_0$ je auf ein ebenes Gebiet $\mathfrak{G}'$, bezw. $\mathfrak{G}''$ abbilden, wobei dem Punkte $\mathfrak{p}_0$ der Punkt $t'=0$, bzw. $t''=0$ entspricht. Diese Abbildungen mögen T', T'' heißen. Die Abbildung $T'^{-1}T''$ von $\mathfrak{G}'$ auf $\mathfrak{G}''$ wird vermittelt durch eine Formel

$$t'' = \text{reguläre Funktion von } (t') \text{ in } \mathfrak{G}'.$$

$\circlearrowleft'$ sei derjenige Drehsinn im Nullpunkte der t'-Ebene, der die positive reelle Achse durch 90^0 hindurch in die positive imaginäre Achse überführt. Entsprechend werde der Drehsinn $\circlearrowleft''$ im Nullpunkte der t''-Ebene definiert. Ich behaupte: durch die Abbildung $T'^{-1}T''$ geht $\circlearrowleft'$ in $\circlearrowleft''$ über. Dieser Umstand erlaubt es, $\circlearrowleft'$ und $\circlearrowleft''$ als die durch die Ab-

bildungen T', T'' erzeugten Bilder eines bestimmten Drehsinnes $\mathfrak{A}$ in $\mathfrak{p}_0$ anzusehen, der dadurch in einer von der Wahl der Ortsuniformisierenden unabhängigen Weise festgelegt ist. Da der so zu jedem Punkte $\mathfrak{p}_0$ der Riemannschen Fläche bestimmte Drehsinn $\mathfrak{A}$ auch überall stetig ist — daran ist dann nichts mehr zu beweisen —, steht die Zweiseitigkeit der Riemannschen Flächen fest.

Ich schlage um $t' = 0$ in $\mathfrak{G}'$ einen kleinen Kreis $\mathfrak{k}'$:

$$t' = a e^{i\varphi} \quad (0 \leqq \varphi \leqq 2\pi)$$

[$a > 0$ ist der konstante Radius]. Das durch $T'^{-1}T''$ in $\mathfrak{G}''$ entworfene Bild von $\mathfrak{k}'$ heiße $\mathfrak{k}''$. Gemäß der Definition des Begriffes „Ordnung" ist

$$2\pi i \cdot \underset{\mathfrak{k}''}{\text{ord.}}\,(t'' = 0) = \int_{\mathfrak{k}''} \frac{dt''}{t''}.$$

Es gilt aber

$$\frac{dt''}{t''} = \left(\frac{1}{t'} + a_0 + a_1 t' + a_2 t'^2 + \cdots\right) dt',$$

wobei die Potenzreihe in einem Kreise der t'-Ebene, der $\mathfrak{k}'$ im Innern enthält, konvergiert. Also folgt

$$\int_{\mathfrak{k}''} \frac{dt''}{t''} = \int_{\mathfrak{k}'} \frac{dt'}{t'} = 2\pi i,$$

und damit ist erwiesen, daß $\underset{\mathfrak{k}''}{\text{ord.}}\,(t'' = 0) = +1$ und nicht $= -1$ ist, oder daß $\mathfrak{A}'$ durch die Abbildung $T'^{-1}T''$ in $\mathfrak{A}''$ übergeht.

Ist die Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ irgendwie trianguliert, so induziert der eben festgelegte „positive" Drehsinn $\mathfrak{A}$ in jedem Dreieck eine „positive" Indikatrix. Ist dz ein in allen Punkten eines Elementardreiecks der triangulierten Fläche einschließlich des Randes reguläres Differential, so ist das um den Rand des Dreiecks mit positiver Indikatrix erstreckte Integral von dz gleich Null. Ist dz in dem ganzen Dreieck einschließlich des Randes regulär, abgesehen von einem im Innern gelegenen Pol, so ist dieses Integral hingegen $= 2\pi i$ mal dem Residuum von dz in jenem Pole.

Ist dz auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche bis auf Pole regulär, so kann man $\mathfrak{F}$ derart in Elementardreiecke zerlegen, daß die Pole ins Innere der Dreiecke und niemals zwei oder mehr Pole ins Innere desselben Dreiecks fallen (S. 64). Integriert man $\int dz$ um alle Dreiecke mit positiver Indikatrix und addiert, so bekommt man $2\pi i$ mal der Summe aller Residuen von dz. Umläuft man aber alle Dreiecksumfänge mit positiver Indikatrix, so wird wegen der Kohärenz dabei jede Kante zweimal, aber im entgegengesetzten Sinne durchlaufen. Infolgedessen muß jene Integralsumme anderseits $= 0$ sein, und wir gewinnen den Satz:

Die Summe der Residuen eines auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche bis auf Pole regulären Differentials ist 0.

§ 11. Integralfunktionen. Geschlechtszahl. Kanonische Zerschneidung.

Der Prozeß der Integration von Differentialen auf einer Riemannschen Fläche kann für beliebige Flächen durch folgende Verallgemeinerung ersetzt werden.

Eine **Kurvenfunktion** F ist auf einer Fläche $\mathfrak{F}$ definiert, wenn jeder Kurve γ auf $\mathfrak{F}$ eine Zahl $F(\gamma)$ zugeordnet ist; $F(\gamma)$ wird dann als der **Wert** von F für die Kurve γ bezeichnet. Fällt für zwei Kurven γ', γ'' der Endpunkt von γ' mit dem Anfangspunkt von γ'' zusammen, so kann man aus ihnen eine einzige Kurve $\gamma = \gamma' + \gamma''$ zusammensetzen; ist stets

$$F(\gamma' + \gamma'') = F(\gamma') + F(\gamma''),$$

so heißt die Kurvenfunktion **linear.** Eine lineare Kurvenfunktion hat für eine geschlossene Kurve einen Wert, der sich nicht ändert, wenn man den Anfangspunkt der geschlossenen Kurve auf ihr verschiebt. Hat F für jede geschlossene Kurve den Wert 0, so schreiben wir $F \sim 0$ (F **homolog** 0). Es gibt dann eine „Punktfunktion" $f(\mathfrak{p})$ auf der Fläche, sodaß für jede Kurve

$$F(\gamma) = f(\mathfrak{p}_2) - f(\mathfrak{p}_1)$$

ist, wenn $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ Anfangs- und Endpunkt von γ bedeuten. Wir betrachten nur solche lineare Kurvenfunktionen, welche „im Kleinen" überall ~ 0 sind; diese mögen **„Integralfunktionen"** heißen. Es soll also zu jedem Punkt der Fläche eine Umgebung von der Art geben, daß für jede in dieser Umgebung verlaufende geschlossene Kurve γ_0: $F(\gamma_0) = 0$ ist. Für eine Integralfunktion F ist stets

$$F(-\gamma) = -F(\gamma),$$

wenn $-\gamma$ den in entgegengesetztem Sinne durchlaufenen Weg γ bedeutet:

$$\gamma\colon \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(\lambda)\ [0 \leqq \lambda \leqq 1]; \qquad -\gamma : \mathfrak{p} = \mathfrak{p}(1-\lambda)\ [0 \leqq \lambda \leqq 1].$$

Auf einer einfach zusammenhängenden Fläche, insbesondere daher auf der universellen Überlagerungsfläche, ist jede Integralfunktion ~ 0.

Integralfunktionen kann man mit konstanten Faktoren multiplizieren und addieren. Integralfunktionen $F_1, \ldots, F_m$, zwischen denen eine Homologie

$$c_1 F_1 + \ldots + c_m F_m \sim 0$$

mit konstanten nicht sämtlich verschwindenden Koeffizienten c besteht, heißen **linear abhängig.** Gibt es endlich viele, etwa h, linear unabhängige Integralfunktionen $F_1, \ldots, F_h$ von der Art, daß jede Integralfunktion F einer linearen Kombination dieser h Integralfunktionen mit konstanten Koeffizienten homolog ist, so bilden $F_1, \ldots, F_h$ eine **„Basis"** der linearen Schar der inhomologen Integralfunktionen, und die Anzahl h der Basisfunktionen (die offenbar für jede Basis die gleiche ist) wird als **„Grad"** dieser Schar bezeichnet. Wir nennen sie auch den **„Zu-**

sammenhangsgrad"[1]) der Fläche $\mathfrak{F}$, deren Integralfunktionen wir betrachten. Gibt es keine endliche Basis für die Integralfunktionen, so besitzt $\mathfrak{F}$ einen unendlich hohen Zusammenhangsgrad.

Wir fassen insbesondere ein Polyeder $\mathfrak{P}$ ins Auge und gehen darauf aus, seinen Zusammenhangsgrad h durch die Anzahl d der Dreiecke von $\mathfrak{P}$, die Anzahlen e, k seiner inneren Ecken und Kanten auszudrücken. In jedem der endlich vielen Dreiecke Δ, aus denen $\mathfrak{P}$ zusammengesetzt ist, tragen wir den Schwerpunkt $(1:1:1)$ ein. Sind (wie in der folgenden Überlegung stets) Δ_1, Δ_2 irgend zwei dieser Dreiecke, die längs einer inneren Kante von $\mathfrak{P}$ aneinanderstoßen, $\mathfrak{s}_1, \mathfrak{s}_2$ ihre Schwerpunkte, so hat für jede innerhalb $\Delta_1 + \Delta_2$ verlaufende, von $\mathfrak{s}_1$ nach $\mathfrak{s}_2$ führende Kurve γ die Integralfunktion $F(\gamma)$ denselben Wert, den wir mit $x_{\Delta_1 \Delta_2}[F]$ bezeichnen wollen. Dies liegt daran, daß nicht nur ein einzelnes Dreieck, sondern auch das Dreieckspaar $\Delta_1 + \Delta_2$ einfach zusammenhängend ist. Es ist immer $x_{\Delta_1 \Delta_2} = - x_{\Delta_2 \Delta_1}$. Ist $\mathfrak{e}$ ein innerhalb $\mathfrak{P}$ gelegener Eckpunkt, $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ die sich um $\mathfrak{e}$ gruppierenden Dreiecke in zyklischer Anordnung, so muß

$$(\mathfrak{e}) \qquad x_{\Delta_1 \Delta_2} + x_{\Delta_2 \Delta_3} + \ldots + x_{\Delta_r \Delta_1} = 0$$

sein, weil auch jeder Dreiecksstern einfach zusammenhängend ist. (Die linke Seite dieser Gleichung ändert ihr Vorzeichen, wenn wir die zyklische Anordnung der Dreiecke Δ_i, d. i. die Indikatrix im Dreiecksstern umkehren.) Geben wir das System der Zahlen $x_{\Delta_1 \Delta_2}$ irgendwie den ausgesprochenen Bedingungen gemäß vor, so erkennt man ohne Mühe, daß es immer eine Integralfunktion gibt, der diese $x_{\Delta_1 \Delta_2}$ in der angegebenen Weise zugehören[2]). Eine Integralfunktion F ist dann und nur dann

---

1) Diese Zahl entspricht der „Zusammenhangszahl" Riemanns, ist aber für geschlossene Flächen um 1 niedriger als diese. Vgl. Schläfli, Crelles Journal Bd. 76, S. 152, Fußnote, und Klein, Math. Ann., Bd. 7, S. 550, Fußnote.

2) Z. B. folgendermaßen: In einem einzelnen Dreiecksstern kann ich den Dreiecken $\Delta_1, \ldots, \Delta_r (\Delta_{r+1} = \Delta_1)$ Zahlen $g_1, \ldots, g_r$ $(g_{r+1} = g_1)$ so zuordnen, daß

$$x_{\Delta_1 \Delta_2} = g_2 - g_1, \; x_{\Delta_2 \Delta_3} = g_3 - g_2, \ldots, x_{\Delta_r \Delta_1} = g_1 - g_r$$

ist. Ich definiere im Innern dieses Sterns eine Punktfunktion f, die im Innern des Dreiecks $\Delta_i := g_i$ ist, auf der Kante, die Δ_i von Δ_{i+1} trennt, von den Endpunkten abgesehen, den konstanten Wert $\frac{1}{2}\{g_i + g_{i+1}\}$ besitzt, im gemeinsamen Eckpunkt der Dreiecke Δ_i dem arithmetischen Mittel der r Zahlen g_i gleich wird. Für eine innerhalb dieses Sternes verlaufende Kurve $\gamma = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)$ definiere ich $F(\gamma) = f(\mathfrak{p}_2) - f(\mathfrak{p}_1)$. In der Wahl der g_i steckt insofern eine Willkür, als ich sie alle um dieselbe Zahl vermehren kann; das ist aber auf $F(\gamma)$ ohne Einfluß. Liegt γ im Innern zweier Dreieckssterne zugleich (die dann ein Dreieckspaar, in welchem γ gelegen ist, gemein haben), so hängt der Wert von $F(\gamma)$ auch nicht davon ab, welchen der beiden Dreieckssterne ich in der angegebenen Weise zur Berechnung benutze. Ist γ eine beliebige Kurve, so kann ich sie in endlich viele konsekutive Bögen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_n$ derart zerlegen, daß jedes γ_i ganz im Innern eines Dreieckssterns liegt. Ich setze dann:

~ 0, wenn jedem Dreieck Δ von $\mathfrak{P}$ eine Zahl g_Δ entspricht, sodaß für alle Dreieckspaare $\Delta_1 \Delta_2$, die eine innere Kante von $\mathfrak{P}$ gemein haben,

$$x_{\Delta_1 \Delta_2}[F] = g_{\Delta_2} - g_{\Delta_1}$$

ist.

Wenn wir von je zwei entgegengesetzt gleichen Zahlen $x_{\Delta_1 \Delta_2}$, $x_{\Delta_2 \Delta_1}$ immer nur eine beibehalten und der gemeinsamen Kante der Dreiecke Δ_1, Δ_2 zuordnen, so haben wir k „Unbekannte" x; zwischen ihnen bestehen die e linearen homogenen Gleichungen ($\mathfrak{e}$), die den einzelnen inneren Eckpunkten $\mathfrak{e}$ von $\mathfrak{P}$ entsprechen. Sind diese Gleichungen linear unabhängig voneinander? Angenommen, es bestünde zwischen ihren linken Seiten eine Identität mit den Koeffizienten $y_\mathfrak{e}$. Betrachten wir eine Kante $\mathfrak{e}\mathfrak{f}$, deren beide Eckpunkte $\mathfrak{e}$, $\mathfrak{f}$ im Innern von $\mathfrak{P}$ liegen. Die beiden zu den Ecken $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ gehörigen Gleichungen mögen in solcher Form geschrieben sein, daß sie zwei kohärenten Indikatrizen der beiden zu $\mathfrak{e}$ und $\mathfrak{f}$ gehörigen Dreieckssterne entsprechen:

$$(\mathfrak{e}):\quad \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \ldots, \Delta_r$$
$$(\mathfrak{f}):\quad \Delta_1' = \Delta_2,\ \Delta_2' = \Delta_1,\ \Delta_3', \ldots, \Delta_s'.$$

Die Unbekannte $x_{\Delta_1 \Delta_2}$ tritt dann nur in diesen beiden Gleichungen und zwar mit entgegengesetztem Vorzeichen auf, und es muß daher $y_\mathfrak{e} = y_\mathfrak{f}$ sein. Ist hingegen $\mathfrak{e}\bullet$ eine Kante, deren einer Eckpunkt $\mathfrak{e}$ im Innern, deren anderer $\bullet$ am Rande von $\mathfrak{P}$ liegt, so schließt man auf gleiche Weise $y_\mathfrak{e} = 0$. Ist $\mathfrak{P}$ offen, so kann man von jedem inneren Eckpunkt aus einen Kantenzug an den Rand legen $\mathfrak{e}\mathfrak{f}\ldots\mathfrak{l}\bullet$ und findet

$$y_\mathfrak{e} = y_\mathfrak{f} = \ldots = y_\mathfrak{l} = 0.$$

Ist $\mathfrak{P}$ geschlossen, aber einseitig, so kann man von $\mathfrak{e}$ aus einen nach $\mathfrak{e}$ zurückkehrenden Kantenzug ziehen, auf dem sich die Indikatrix umkehrt: an diesem entlang von Eckpunkt zu Eckpunkt schließend, bekommt man $y_\mathfrak{e} = -y_\mathfrak{e}$, also gleichfalls $y_\mathfrak{e} = 0$. Ist $\mathfrak{P}$ geschlossen und zweiseitig, so versehe man alle Dreieckssterne auf $\mathfrak{P}$ mit Indikatrizen, die unter einander kohärent sind, und schreibe jede der Gleichungen ($\mathfrak{e}$) dieser Indikatrix entsprechend. Dann findet man, da man jede Ecke mit jeder durch einen Kantenzug verbinden kann, daß alle $y_\mathfrak{e}$ einander gleich sind, und es besteht dann wirklich zwischen den linken Seiten der Gleichungen ($\mathfrak{e}$) die Identität mit den Koeffizienten $y_\mathfrak{e} = 1$. Setzen wir $\varepsilon = 0$ für geschlossene zweiseitige Polyeder, sonst $\varepsilon = 1$, so haben die Gleichungen ($\mathfrak{e}$) also $k - e + 1 - \varepsilon$ linear unabhängige Lösungen.

$$F(\gamma) = F(\gamma_1) + F(\gamma_2) + \ldots + F(\gamma_n).$$

Es kommt nach dieser Erklärung immer derselbe Wert heraus, welche Einteilung in Teilbögen γ_i ich auch vornehme. Um die beiden für zwei verschiedene Teilungen sich ergebenden Werte zu vergleichen und ihre Übereinstimmung festzustellen, brauche ich nur beide Teilungen gleichzeitig anzubringen. $F(\gamma)$ ist eine Integralfunktion, wie wir sie wünschen.

Ordnet man willkürlich jedem Dreieck Δ von $\mathfrak{P}$ eine Zahl g_Δ zu, so erhält man durch die allgemeine Formel $x_{\Delta_1 \Delta_2} = g_{\Delta_2} - g_{\Delta_1}$ stets eine Lösung der in Frage stehenden Gleichungen; von den so entstehenden Lösungen werden wir sagen, daß sie ~ 0 sind. Die Zahlensysteme $\{g_\Delta\}$ bilden eine lineare Schar vom Grade d. Ein solches System liefert dann und nur dann für alle $g_{\Delta_2} - g_{\Delta_1}$ die 0, wenn g_Δ für *alle* Dreiecke Δ denselben Wert hat (wir benutzen dabei, daß $\mathfrak{P}$ zusammenhängend ist). Die Lösungen von ($\mathfrak{e}$), welche ~ 0 sind, bilden also eine lineare Schar vom Grade $d - 1$. Der Überschuß

$$(k - e + 1 - \varepsilon) - (d - 1) = (k - e - d + 2) - \varepsilon$$

gibt die gesuchte größte Anzahl h der linear unabhängigen Integralfunktionen auf $\mathfrak{P}$. *Es folgt aus der durch die obigen Betrachtungen aufgedeckten Bedeutung von h, daß diese Größe für geschlossene Flächen von der Art ihrer Triangulation völlig unabhängig ist*[1]; *außerdem muß stets $h \geq 0$ sein.*

Daß zwischen l geschlossenen Wegen $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ die **Homologie**[2])

$$c_1\gamma_1 + c_2\gamma_2 + \ldots + c_l\gamma_l \sim 0$$

mit den Zahlen c_i als Koeffizienten besteht, soll besagen, daß für jede Integralfunktion F die Gleichung

$$c_1 F(\gamma_1) + c_2 F(\gamma_2) + \ldots + c_l F(\gamma_l) = 0$$

statthat. Hat die Fläche, welche wir betrachten, den endlichen Zusammenhangsgrad h, so besteht zwischen $l > h$ geschlossenen Wegen stets eine solche Homologie mit nicht lauter verschwindenden Koeffizienten. Man braucht nämlich nur die h homogenen linearen Gleichungen

$$c_1 F_i(\gamma_1) + c_2 F_i(\gamma_2) + \ldots + c_l F_i(\gamma_l) = 0 \qquad [i = 1, \ldots, h]$$

in der die $F_1, \ldots F_h$ eine Basis für die Integralfunktionen bilden, zu

---

1) Gewöhnlich wird die Zusammenhangszahl (nach Riemann) mit Hilfe der Zerschneidung der gegebenen Fläche in eine einfach zusammenhängende erklärt, wobei man innerhalb der Analysis situs nicht umhin kann, als Zerschneidungslinien beliebige stetige Kurven zuzulassen; die Beweise dafür aber, daß die so definierte Zahl durch die Fläche allein bestimmt ist, sind nicht streng und scheinen sich auch nur schwer in strenge Form bringen zu lassen. Indem wir hier eine neue Definition zu Grunde legten, welche zu den funktionentheoretischen Anwendungen (Theorie der Abelschen Integrale) in engster Beziehung steht, ist dieser Übelstand vermieden worden. Man darf wohl sagen, daß unser Verfahren den eigentlichen Kern der von Weierstraß, Hensel-Landsberg u. a. in der Theorie der algebraischen Funktionen angewendeten Methode, zunächst das Verhalten der *Integrale* zu untersuchen und daraus Schlüsse über die Integrations*wege* zu ziehen, in einer von allen funktionentheoretischen Zufälligkeiten befreiten Form vor Augen stellt. — Die für geschlossene, zweiseitige, einfach zusammenhängende Polyeder gültige Gleichung $e + d - k = 2$ wird als die *Eulersche Polyederformel* bezeichnet. S. Euler, Petrop. Novi Comm. 4 (1752—53), S. 109.

2) Vgl. Poincaré, Analysis situs, Journal de l'École polytechnique, Ser. 2, Bd. 1 (1895), S. 19.

lösen, um solche Koeffizienten zu ermitteln. Es muß demnach eine gewisse Anzahl h' ($\leqq h$) von geschlossenen Wegen $\gamma_1, \ldots, \gamma_{h'}$ geben, sodaß zwischen diesen keine Homologie (mit Koeffizienten, die nicht alle 0 sind) besteht, wohl aber zwischen je $h' + 1$ geschlossenen Wegen. $\gamma_1, \ldots, \gamma_{h'}$ bilden dann eine Basis für die Schar der inhomologen geschlossenen Wege, und h' ist der Grad dieser Schar. In analoger Weise, wie oben $h' \leqq h$ gefunden wurde, beweist man $h \leqq h'$; demnach ist $h' = h$.

Die besondere Natur der Objekte (geschlossenen Wege), aus denen unsere Schar besteht, bringt es mit sich, daß eine Basis $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ so ausfindig gemacht werden kann, daß für jeden geschlossenen Weg eine Homologie

$$\gamma \sim n_1 \gamma_1 + \cdots + n_h \gamma_h$$

mit ganzzahligen Koeffizienten $n_1, \ldots, n_h$ stattfindet. Es sei zunächst $\gamma_1', \gamma_2', \ldots, \gamma_h'$ eine beliebige Basis der geschlossenen Kurven. Jeder geschlossenen Linie

$$\gamma \sim r_1 \gamma_1' + r_2 \gamma_2' + \ldots + r_h \gamma_h'$$

ordne man in einem Cartesischen h-dimensionalen Raum den Punkt mit den Koordinaten $(r_1, r_2, \ldots, r_h)$ zu:

$$\gamma \sim (r_1, r_2, \ldots, r_h).$$

Das System G der so den sämtlichen geschlossenen Kurven γ entsprechenden Punkte bildet ein „Gitter"; d. h. mit jedem Punkt $(r_1, r_2, \ldots, r_h)$ gehört auch $(-r_1, -r_2, \ldots, -r_h)$ zu G, und wenn $(r_1', r_2', \ldots, r_h')$, $(r_1'', r_2'', \ldots, r_h'')$ irgend zwei zu G gehörige Punkte sind, so ist auch immer

$$(r_1' + r_1'', r_2' + r_2'', \ldots. r_h' + r_h'')$$

in G enthalten. Denn aus zwei geschlossenen Wegen γ', γ'' kann man stets einen geschlossenen Weg

$$\gamma \sim \gamma' + \gamma''$$

dadurch erhalten, daß man γ' von einem seiner Punkte $\mathfrak{p}'$ aus einmal umläuft, dann von $\mathfrak{p}'$ längs einer beliebigen Kurve σ nach einem Punkte $\mathfrak{p}''$ von γ'' geht, γ'' von $\mathfrak{p}''$ aus umläuft und schließlich längs σ in umgekehrter Richtung nach $\mathfrak{p}'$ zurückkehrt. Insbesondere gehören alle Punkte mit ganzzahligen Koordinaten zu G.

Es liegen aber nicht in beliebiger Nähe des Nullpunktes $(0, 0, \ldots, 0)$ Gitterpunkte, sondern es existiert eine ganze Zahl N von der Beschaffenheit, daß die Koordinaten eines jeden zu G gehörigen Punktes sich durch Multiplikation mit N in ganze Zahlen verwandeln. Beweis: Da die Koeffizienten der Gleichungen ($\mathfrak{e}$) ganze Zahlen sind, kann man insbesondere h *ganzzahlige* Lösungen

$$\{x^{(i)}_{\Delta_1 \Delta_2}\} \qquad [i = 1, 2, \ldots, h]$$

angeben, aus denen sich alle andern im Sinne der Homologie linear zusammensetzen lassen. Diesen h Lösungen entsprechen h linear unabhängige Integralfunktionen F_i, *deren Werte für jede geschlossene Kurve*

ganze Zahlen sind[1]). Setzen wir die von 0 verschiedene Determinante

$$|F_i(\gamma'_j)|_{\substack{i=1,2,\ldots,h\\ j=1,2,\ldots,h}} = N,$$

so ergibt sich unsere Behauptung in Anbetracht der Gleichungen

$$r_1 F_i(\gamma'_1) + r_2 F_i(\gamma'_2) + \ldots + r_h F_i(\gamma'_h) = F_i(\gamma), \quad [i = 1, 2, \ldots, h]$$

auf deren rechten Seiten ganze Zahlen stehen.

Unter allen *(endlich vielen)* Gitterpunkten von der Form

$$(r_1, 0, \cdots, 0) \quad [0 < r_1 \leqq 1]$$

sei

$$\gamma_1 \sim (r_1^{(1)}, 0, \cdots, 0)$$

derjenige, für welchen r_1 seinen kleinsten Wert hat; unter den endlichvielen Gitterpunkten von der Form

$$(r_1, r_2, 0, \cdots, 0) \quad [0 \leqq r_1 < r_1^{(1)}; \quad 0 < r_2 \leqq 1]$$

— deren es sicher welche gibt — ferner

$$\gamma_2 \sim (r_1^{(2)}, r_2^{(2)}, 0, \cdots, 0)$$

derjenige, für welchen $r_2^{(2)}$ möglichst klein ist; unter allen Gitterpunkten

$$(r_1, r_2, r_3, 0, \cdots, 0) \quad [0 \leqq r_1 < r_1^{(1)}, \quad 0 \leqq r_2 < r_2^{(2)}; \quad 0 < r_3 \leqq 1]$$

$$\gamma_3 \sim (r_1^{(3)}, r_2^{(3)}, r_3^{(3)}, 0, \cdots, 0)$$

derjenige, für den $r_3^{(3)}$ am kleinsten ausfällt; usw. Die geschlossenen Kurven $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots, \gamma_h$ bilden dann eine Basis, wie wir sie suchen.[2]) Denn ist $\gamma \sim (r_1, r_2, \ldots, r_h)$ ein beliebiger zu G gehöriger Punkt, so kann man der Reihe nach die ganzen Zahlen $n_h, n_{h-1}, \ldots, n_1$ so bestimmen, daß

$$\gamma - (n_h \gamma_h + n_{h-1} \gamma_{h-1} + \cdots + n_1 \gamma_1) \sim (\bar{r}_1, \bar{r}_2, \ldots, \bar{r}_h)$$
$$0 \leqq \bar{r}_i < r_i^{(i)} (i = h, h-1, \cdots, 1)$$

wird. Dann aber schließt man aus der Bedeutung von $\gamma_h, \gamma_{h-1}, \ldots \gamma_1$ sukzessive

$$0, \quad 0, \quad 0,$$

und das Endergebnis ist das behauptete:

$$\gamma \sim n_h \gamma_h + \cdots + n_2 \gamma_2 + n_1 \gamma_1 .$$

Nur eine Basis $\{\gamma_i\}$, durch die sich alle geschlossenen Kurven im

1) Um den Wert $F(\gamma)$ einer Integralfunktion F für einen geschlossenen Weg γ zu berechnen, kann man γ durch einen in hinreichender Nähe von γ verlaufenden geschlossenen Streckenzug π ersetzen (S. 49); wir nehmen ihn so an, daß er, ohne durch Ecken hindurchzugehen, die Kanten in allen Treffpunkten überkreuzt. Geht π an einer beliebigen solchen Kreuzungsstelle aus dem Dreieck Δ_1 in das Dreieck Δ_2 hinüber, so ist $F(\gamma) = F(\pi)$ gleich der über alle Kreuzungsstellen zu erstreckenden Summe $\sum x_{\Delta_1 \Delta_2} [F]$.

2) Dieses Schlußverfahren wird von Minkowski als „Adaption eines Zahlengitters in bezug auf ein enthaltenes Gitter" bezeichnet. Vgl. Diophantische Approximationen (Leipzig 1907), S. 90—95.

Sinne der Homologie linear-homogen und *ganzzahlig* ausdrücken lassen, wollen wir von jetzt ab als eine wirkliche **Basis** gelten lassen. Der Übergang von einer solchen wirklichen Basis zu einer andern wird vermittelt durch lineare Transformation mit ganzzahligen Koeffizienten, deren Determinante $= \pm 1$ sein muß.

Über der geschlossenen Fläche $\mathfrak{F}$ vom Zusammenhangsgrad h gibt es eine unverzweigte unbegrenzte (reguläre) Überlagerungsfläche $\hat{\mathfrak{F}}$, auf der eine Kurve, deren Spurkurve auf $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, sich dann und nur dann schließt, falls jene Spurkurve ~ 0 ist. Alle Integralfunktionen auf $\mathfrak{F}$ werden, wenn man sie als Integralfunktionen auf $\hat{\mathfrak{F}}$ betrachtet, der 0 homolog; daher nenne ich $\hat{\mathfrak{F}}$ die **Überlagerungsfläche der Integralfunktionen.** Ist $\gamma_1, \ldots, \gamma_h$ eine Basis für die geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$ und bezeichnen wir allgemein mit $\mathfrak{p}S_i$ denjenigen Punkt auf $\hat{\mathfrak{F}}$, zu dem man gelangt, wenn man, von dem beliebigen Punkt $\mathfrak{p}$ auf $\hat{\mathfrak{F}}$ ausgehend, auf $\hat{\mathfrak{F}}$ einen Weg zurücklegt, dessen Spurlinie in $\mathfrak{F}$ geschlossen und $\sim \gamma_i$ ist, so bedeuten die S_i Decktransformationen von $\hat{\mathfrak{F}}$ in sich und erzeugen zusammen die gesamte Gruppe dieser Decktransformationen, die eine kommutative (Abelsche) Gruppe ist:

$$S_1^{n_1} S_2^{n_2} \cdots S_h^{n_h}$$

[$n_1, n_2, \ldots, n_h$ durchlaufen unabhängig voneinander alle ganzen Zahlen].

Im Falle der geschlossenen zweiseitigen Flächen hat Riemann für die im Kap. II zu besprechenden funktionentheoretischen Anwendungen eine besondere Basis der geschlossenen Wege, die sog. *kanonische Zerschneidung*, konstruiert.[1]) Wir gründen diese Konstruktion auf die folgenden Überlegungen.

Auf einem einfach zusammenhängenden Polyeder ist jede Integralfunktion ~ 0, also sein Zusammenhangsgrad $h = 0$. *Von diesem Satz gilt auch die Umkehrung.* Würde z. B. das offene Polyeder $\mathfrak{P}$, für welches $h = 0$ vorausgesetzt wird, nicht einfach zusammenhängend sein, so führe man einen (aus n Kanten bestehenden) Querschnitt, der $\mathfrak{P}$ nicht zerlegt. Dadurch wird $\mathfrak{P}$ in ein Polyeder $\mathfrak{P}'$ verwandelt, dessen Anzahlen sich aus den Formeln

$$d' = d, \quad k' = k - n, \quad e' = e - (n-1)$$

berechnen, und für $\mathfrak{P}'$ ergäbe sich $h' = -1$, was unmöglich ist.

Es sei auf einer in bestimmter Triangulierung ζ vorliegenden geschlossenen zweiseitigen Fläche $\mathfrak{F}_\zeta$ ein $\mathfrak{F}$ nicht zerlegendes Polygon π gegeben, das aus Kanten von ζ besteht. Es läßt sich dann, da π die Fläche nicht zerlegt, ein Polygon π' auf $\mathfrak{F}_\zeta$ zeichnen, das π an einer einzigen Stelle überkreuzt, sonst aber keinen Punkt mit π gemein hat. Machen

1) Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, Werke, 2. Aufl., S. 129—130.

wir eine solche Unterteilung ζ^* von ζ, daß auch π' ganz aus Kanten besteht, so ist $\pi + \pi'$ eine abgeschlossene Punktmenge von solcher Art, daß sie nicht nur $\mathfrak{F}$ unzerlegt läßt, sondern überhaupt jedes Gebiet, dem sie angehört. Die Dreiecke von ζ^*, welche (mit einer Ecke oder Kante) an $\pi + \pi'$ stoßen, lassen sich nämlich in einer einzigen geschlossenen Kette so anordnen (wobei allerdings Dreiecke in der Kette mehrfach auftreten können), daß je zwei aufeinanderfolgende Dreiecke der Kette eine nicht zu $\pi + \pi'$ gehörige Kante gemein haben. Bei der Herstellung dieser Anordnung wird davon Gebrauch gemacht, daß π sowohl als π' getrennte Ufer besitzt. $\pi + \pi'$ nennen wir ein **Rückkehrschnittpaar.**

Fig. 21. Rückkehrschnittpaar.

Hat man auf $\mathfrak{F}_c$ q sich gegenseitig nicht treffende Rückkehrschnittpaare

$$\pi_1 + \pi_1', \quad \pi_2 + \pi_2', \cdots, \quad \pi_q + \pi_q',$$

die $\mathfrak{F}_c$ nicht zerlegen, so kann man einen willkürlichen Punkt $\mathfrak{p}_0$ auf der Fläche (der nicht auf diesen q Rückkehrschnittpaaren liegt) durch einfache Streckenzüge $\sigma_1, \ldots, \sigma_q$ mit den Kreuzungspunkten der Rückkehrschnittpaare verbinden. Die σ können wir so wählen, daß sich je zwei von ihnen außer in $\mathfrak{p}_0$ nicht schneiden und daß σ_i mit dem i^{ten} Rückkehrschnittpaar den Kreuzungspunkt, sonst aber keinen Punkt gemein hat, die übrigen Rückkehrschnittpaare jedoch überhaupt nicht trifft: wir haben dann ein „Gespann“ von q Rückkehrschnittpaaren, das durch die „Zügel“ σ an den Punkt $\mathfrak{p}_0$ befestigt ist. Machen wir eine solche Unterteilung ζ^* von ζ, daß das ganze Schnittsystem

$$\Sigma := \sum_{i=1}^{q} (\pi_i + \pi_i' + \sigma_i)$$

aus Kanten besteht, so erkennen wir, daß es nicht nur $\mathfrak{F}$, sondern jedes Gebiet, das Σ ganz enthält, unzerlegt läßt (Fig. 22). Indem wir die Verbindung der Dreiecke über die Kanten des Schnittsystems hinüber lösen, erhalten wir aus dem geschlossenen ein offenes Polyeder $\mathfrak{P}'$. Die Anzahl der Dreiecke d ist bei dieser Operation dieselbe geblieben; die Anzahl $k - e$ ist um $2q - 1$ gesunken. Es muß also (wenn h den Zusammenhangsgrad von $\mathfrak{F}$ bedeutet)

$$h - (2q - 1) \geqq 1 \quad \text{oder} \quad 2q \leqq h$$

sein. Ist noch $2q < h$, so ist $\mathfrak{P}'$ nicht einfach zusammenhängend. Wir zeichnen dann in $\mathfrak{P}'$ einen Querschnitt v, der $\mathfrak{P}'$ nicht zerlegt, und verbinden zwei Punkte, die sich an den beiden Ufern einer zu v gehörigen Kante gegenüberliegen, durch ein v nicht treffendes Polygon π_{q+1}' in $\mathfrak{P}'$. Wir lassen von v am Anfang und Ende ein kleines Stück der ersten bezw. letzten Kante fort und verbinden Anfang und Ende des so verstümmelten

Querschnittes v^- durch einen Streckenzug τ innerhalb $\mathfrak{P}'$, der in solcher Nähe des Schnittsystemes Σ bleibt, daß er auch π'_{q+1} nicht treffen kann. $v^- + \tau = \pi_{q+1}$ ist dann ein geschlossenes Polygon, das $\mathfrak{P}'$ nicht zerlegt, da π'_{q+1} die beiden Ufer einer zu π_{q+1} gehörigen Strecke ohne Überschreitung von π_{q+1} innerhalb $\mathfrak{P}'$ verbindet. $\pi_{q+1} + \pi'_{q+1}$ ist ein weiteres Rückkehrschnittpaar, das mit den vorigen keinen einzigen Punkt gemein hat und mit ihnen zusammen $\mathfrak{F}$ immer noch nicht zerlegt.

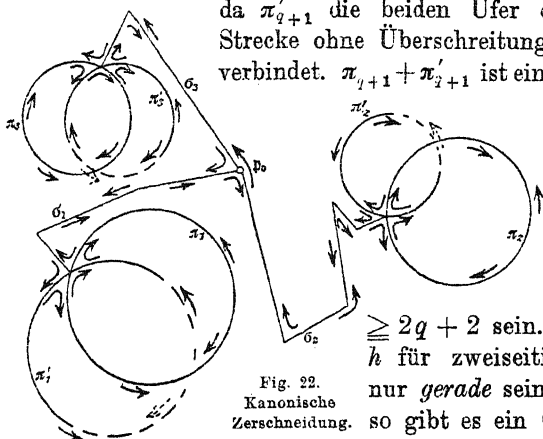



Fig. 22. Kanonische Zerschneidung.

Wenn die Zahl $h > 2q$ ist, muß sie folglich $\geqq 2q + 2$ sein. Dies zeigt, daß die Zahl h für zweiseitige geschlossene Flächen nur *gerade* sein kann. Setzen wir $h = 2p$, so gibt es ein Gespann von p Rückkehrschnittpaaren $\pi + \pi'$, die mit Hilfe von Zügeln σ an einen Punkt $\mathfrak{p}_0$ der Fläche befestigt sind. p heißt das **Geschlecht** von $\mathfrak{F}$. Wir können annehmen (indem wir eventuell von der ursprünglichen Triangulation ζ zu einer Unterteilung ζ^* übergehen), daß alle diese Linien π, π', σ aus Kanten bestehen; *sie liefern die* **kanonische Zerschneidung** *von $\mathfrak{F}_{\zeta^*}$ in ein einfach zusammenhängendes Polyeder $\mathfrak{F}_*$.*

Jedes Dreieck von $\mathfrak{F}_{\zeta^*}$ sei dem Prinzip der Kohärenz gemäß mit einer Indikatrix versehen. Von zwei Elementardreiecken der Triangulation, die längs einer gerichteten Kante $\overrightarrow{12}$ aneinanderstoßen, nennen wir dasjenige, dessen Indikatrix $= (12*)$ ist, das **linke**, das andere das **rechte**. Den Zügeln σ erteilen wir die Richtung von $\mathfrak{p}_0$ nach den Kreuzungspunkten, den π, π' einen solchen Umlaufssinn, daß π' die Linie π von rechts nach links (π also π' von links nach rechts) überkreuzt.

Wir betrachten eine Integralfunktion F auf $\mathfrak{F}$. Es gibt auf $\mathfrak{F}_*$ eine Punktfunktion f, so daß für jede in $\mathfrak{F}_*$ verlaufende Kurve γ, deren Anfangs- und Endpunkt $\mathfrak{p}_1$, $\mathfrak{p}_2$ heißen sollen,

$$F(\gamma) = f(\mathfrak{p}_2) - f(\mathfrak{p}_1)$$

ist. Es seien Δ', Δ'' zwei Dreiecke, die eine dem kanonischen Schnittsystem gehörige Kante $\varkappa$ gemein haben (Δ' liege auf dem linken, Δ'' auf dem rechten Ufer des betreffenden Schnittes); dann gibt es in $\Delta' + \Delta''$ eine Funktion f_0, so daß für jede in $\Delta' + \Delta''$ verlaufende Kurve $\gamma = (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2)$

$$F(\gamma) = f_0(\mathfrak{p}_2) - f_0(\mathfrak{p}_1).$$

Es muß dann

$$f = f_0 + c' \text{ in } \Delta', \qquad f = f_0 + c'' \text{ in } \Delta''$$

sein, wo c', c'' Konstante sind. $c'' - c'$ nenne ich den **Sprung** von F auf $\varkappa$. Betrachtet man einen Dreiecksstern, der sich um eine auf dem kanonischen Schnittsystem gelegene Ecke gruppiert, die mit keinem der Kreuzungspunkte zusammenfällt, so stellt sich heraus, daß der Sprung von F für alle Kanten, die demselben der Schnitte π, π', σ angehören, den gleichen Wert besitzt. Er sei

$$= a_i \text{ für } \pi_i, \qquad = a_i' \text{ für } \pi_i', \qquad = c_i \text{ für } \sigma_i.$$

Betrachtet man den Dreiecksstern, der sich um den Kreuzungspunkt des i^{ten} Rückkehrschnittpaares gruppiert, so ergibt sich $c_i = 0$. Die Zügel σ_i können demnach fortgelassen werden. Die Zahlen a_i, a_i' werden die **Perioden** der Integralfunktion an den Schnitten π_i, π_i' genannt.

Ist γ eine beliebige geschlossene Kurve, so kann dieselbe zur Berechnung von $F(\gamma)$ ersetzt werden durch ein in hinreichender Nähe von γ verlaufendes Polygon; dies werde so angenommen, daß es die Rückkehrschnittpaare an endlich vielen Stellen überkreuzt, die keine Eckpunkte der Triangulation sind. Ist $+ n_i$ die Anzahl von Malen, die jenes Polygon π_i von links nach rechts überkreuzt, vermindert um die Anzahl von Malen, in der dasselbe von rechts nach links geschieht, und hat $- n_i'$ die analoge Bedeutung für π_i', so ist offenbar

$$F(\gamma) = \sum_{i=1}^{p} n_i a_i - \sum_{i=1}^{p} n_i' a_i';$$

anderseits

$$a_i = F(\pi_i'), \qquad - a_i' = F(\pi_i).$$

Die π_i, π_i' bilden also eine wirkliche Basis für die geschlossenen Wege.

Das Geschlecht p ist, wie Möbius und Jordan[1]) bewiesen haben, *die einzige Analysis-situs-Invariante der geschlossenen zweiseitigen Flächen.* Der Satz nämlich, daß zwei geschlossene zweiseitige Flächen, welche im Sinne der Analysis-situs äquivalent sind, dasselbe p besitzen müssen, läßt sich umkehren. Es verursacht keine große Mühe, den Jordanschen Beweis zu einem den in dieser Schrift angestellten Analysis-situs-Betrachtungen an Strenge ebenbürtigen umzumodeln; wir wollen jedoch darauf nicht eingehen. Welche einschneidende Bedeutung dem Geschlecht einer geschlossenen Riemannschen Fläche für die Theorie der Funktionen auf dieser Fläche zukommt, wird zur Genüge aus den funktionentheoretischen Sätzen des nächsten Kapitels hervorgehen.

Es ist leicht, geschlossene zweiseitige Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum von verhältnismäßig einfacher Natur anzugeben, deren Geschlechtszahl p einen gegebenen Wert hat; z. B. besitzt eine mit p Henkeln versehene Kugel das Geschlecht p.

---

1) Möbius, „Theorie der elementaren Verwandtschaft" (1863), Werke Bd. II, S. 435—471; C. Jordan, Journal de mathématiques, Ser. 2, Bd. 11 (1866), S. 105. Ferner: W. Dyck, Math. Ann. Bd. 32 (1888), S. 457.

Zweites Kapitel.

Funktionen auf Riemannschen Flächen.

§ 12. Das Dirichletsche Integral.

$\mathfrak{E}$ sei in der Euklidischen Ebene mit den rechtwinkligen Koordinaten xy eine abgeschlossene, ganz im Endlichen gelegene Punktmenge. Man zeichne, um den Flächeninhalt von $\mathfrak{E}$ zu bestimmen, in der Ebene das Quadratnetz von der Seitenlänge ε, das durch die Parallelen

$$y = m\varepsilon \text{ (m beliebige ganze Zahl)}$$

zur x-Achse und die Parallelen

$$x = n\varepsilon \text{ (n beliebige ganze Zahl)}$$

zur y-Achse erzeugt wird. Ist dann i_ε die Anzahl der ganz aus inneren Punkten von $\mathfrak{E}$ bestehenden Quadrate des Netzes, a_ε $(> i_\varepsilon)$ aber die Anzahl derjenigen Quadrate des Netzes, die überhaupt Punkte mit $\mathfrak{E}$ gemein haben, so existieren[1]) die Grenzwerte

$$\lim \varepsilon^2 i_\varepsilon = I, \qquad \lim_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 a_\varepsilon = A.$$

Fällt $I = A$ aus, so nennt man diese Zahl den **Inhalt** von $\mathfrak{E}$. Diejenigen Punkte von $\mathfrak{E}$, in deren beliebiger Nähe nicht zu $\mathfrak{E}$ gehörige Punkte angetroffen werden, bilden die **Begrenzung** von $\mathfrak{E}$. Damit $\mathfrak{E}$ ein bestimmter Inhalt zukommt, ist offenbar notwendig und hinreichend, daß die Begrenzung von $\mathfrak{E}$ den Inhalt 0 besitzt.

Eine stetig differentiierbare Kurve, und umsomehr eine analytische oder stückweis analytische Kurve in der Ebene besitzt den Inhalt 0. Die stetig differentiierbare Kurve γ von der Länge l kann man nämlich in $n+1$ Teilbogen je von der Länge $\frac{l}{n+1}$ teilen. Benutzen wir dann ein Quadratnetz von einer Kantenlänge $\varepsilon = \frac{l}{n}$, so kann ein solcher einzelner

1) C. Jordan, Cours d'analyse, 2. Aufl., Bd. 1, S. 28.

Teilbogen offenbar mit höchstens vier Quadraten des Netzes Punkte gemein haben; im ganzen wird es also höchstens $4(n+1)$ Quadrate des Netzes geben, die Punkte von γ enthalten:

$$a_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 \leqq 4(n+1)\frac{l^2}{n^2},$$

woraus die Richtigkeit der Behauptung $\lim\limits_{\varepsilon=0} a_\varepsilon \cdot \varepsilon^2 = 0$ hervorgeht.[1])

Liegt die abgeschlossene Punktmenge $\mathfrak{E}$, von der wir jetzt ein für allemal annehmen, daß sie einen Inhalt J besitzt, ganz in einem Gebiet $\mathfrak{G}$, in welchem eine stetige Funktion f definiert ist, so hat das Integral $\iint\limits_{\mathfrak{E}} f\,dx\,dy$ einen klaren Sinn. Einen Näherungswert desselben berechnet man, wenn man den Inhalt ε^2 eines jeden zu $\mathfrak{E}$ gehörigen Quadrates des ε-Netzes mit dem Wert von f im Mittelpunkt dieses Quadrates multipliziert und alle diese von den einzelnen Quadraten herrührenden Beiträge addiert. Die so ermittelte Zahl konvergiert gegen den Wert des Integrals, wenn man ε gegen 0 gehen läßt. Es ist dabei gleichgültig, ob man nur über die ganz innerhalb $\mathfrak{E}$ gelegenen Quadrate des Netzes summiert, oder außerdem auch einige oder alle an den Rand von $\mathfrak{E}$ stoßenden Quadrate mitberücksichtigt. Ist $\mathfrak{E}$ in endlichviele abgeschlossene Mengen $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \cdots, \mathfrak{E}_n$ mit bestimmtem Inhalt zerlegt (so daß die $\mathfrak{E}_i$ in ihren inneren Punkten durchweg verschieden sind, jedes $\mathfrak{E}_i$ ein Teil von $\mathfrak{E}$ ist, aber auch jeder Punkt von $\mathfrak{E}$ in mindestens einem der $\mathfrak{E}_i$ enthalten ist), so ergibt sich aus der Definition ohne weiteres das Additionsgesetz

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}} f\,dx\,dy = \sum_{i=1}^{n} \iint\limits_{\mathfrak{E}_i} f\,dx\,dy.$$

Ist $\mathfrak{G}$ umkehrbar-eindeutig und -gebietsstetig auf ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ der $x'y'$-Ebene abgebildet:

$$(14) \qquad x' = x'(xy), \qquad y' = y'(xy)$$

wobei die Differentialquotienten

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{matrix} \right\|$$

stetige Funktionen von xy sein sollen und ihre Determinante d überall $\neq 0$, so gilt die Transformationsformel

$$\iint\limits_{\mathfrak{E}} f\,dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{E}'} \frac{f}{d}\,dx'\,dy'.$$

1) Der Beweis stammt von C. Jordan (Cours d'analyse, 2. Aufl., Bd. 1, S. 107).

Dabei ist $\mathfrak{E}'$ das Bild von $\mathfrak{E}$, und in dem Integral rechts ist $\frac{f}{d}$ vermöge der Transformationsformeln als Funktion von x', y' auszudrücken.

Ist u eine stetig differentiierbare Funktion in $\mathfrak{G}$, so pflegt man (übrigens mit geringem historischen Recht)

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{G}}(u) = \iint\limits_{\mathfrak{G}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

als das **Dirichletsche Integral** zu bezeichnen. *Es ist gegenüber konformer Abbildung invariant.* In der Tat: ist die Abbildung (14) konform ($d \neq 0$ ist dann eine Folge der vorausgesetzten Umkehrbar-Eindeutigkeit der Abbildung), so ist zufolge der Riemann-Cauchyschen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2\right]\left[\left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2\right],$$

$$d = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2,$$

also

$$\iint\limits_{\mathfrak{G}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = \iint\limits_{\mathfrak{G}'} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'}\right)^2\right] dx'\,dy'.$$

Dieses Invarianzgesetz ermöglicht es, *das Dirichlet-Integral* einer stetig differentiierbaren Funktion *nicht nur in der Ebene, sondern auf einer beliebigen Riemannschen Fläche zu bilden.*

Es sei also $\mathfrak{F}$ eine geschlossene Riemannsche Fläche, und u eine stetig differentiierbare Funktion auf ihr; wir wollen erklären, was unter dem Dirichletschen Integral $\mathbf{D}(u)$ von u auf $\mathfrak{F}$ zu verstehen ist. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt auf $\mathfrak{F}$ und z eine zu $\mathfrak{p}$ gehörige Ortsuniformisierende, die eine Umgebung von $\mathfrak{p}$ auf ein den Punkt $z = 0$ enthaltendes Gebiet der z-Ebene abbildet, so ist ein ganz diesem Gebiete angehöriger Kreis $|z| \leqq a$ Bild einer Punktmenge auf $\mathfrak{F}$, die wir einen z-**Kreis** um $\mathfrak{p}$ nennen. Die Punkte, für welche $|z| = a$ ist, bilden die Peripherie jenes Kreises. Ordnet man jedem Punkt $\mathfrak{p}$ willkürlich eine Ortsuniformisierende z und einen z-Kreis K zu, so kann man unter diesen K eine endliche Anzahl K_l ($l = 1, 2, \cdots, n$; zu den Punkten $\mathfrak{p}_l$ mit den Ortsuniformisierenden z_l gehörig) so auswählen (Heine-Borelsches Theorem), daß jeder Punkt der Fläche im Innern eines der n Kreise K_l gelegen ist. (Das Heine-Borelsche Theorem für eine beliebige geschlossene Fläche ergibt sich, wenn man auf ihr eine Folge von Triangulationen bildet, von denen jede eine Unterteilung der vorhergehenden ist und die schließlich beliebig fein werden.) Die Peripherien $\varkappa_l$ der K_l sind geschlossene analytische Linien und schneiden sich daher nur in endlich vielen Punkten. Infolgedessen bestimmt die abgeschlossene Menge $\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n$ auf $\mathfrak{F}$ nur endlich viele Gebiete, die wir, nachdem jedes von ihnen durch Hinzu-

fügung seiner Grenze zu einer abgeschlossenen Menge gemacht ist, mit $\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_r$ bezeichnen. Die Begrenzung jedes $\mathfrak{E}_h$ besteht aus endlich vielen analytischen Kurvenstücken. Jedes $\mathfrak{E}_h$ liegt ganz in einem der Kreise K_l, und z_l ist dann eine **zu $\mathfrak{E}_h$ gehörige Uniformisierende,** d. h. eine in allen Punkten eines gewissen, $\mathfrak{E}_h$ enthaltenden Gebietes reguläre Funktion, welche von diesem Gebiet ein umkehrbar-eindeutiges und -gebietsstetiges konformes Abbild in der z_l-Ebene entwirft. Wir denken uns jedem $\mathfrak{E}_h$ in bestimmter Weise eine zu $\mathfrak{E}_h$ gehörige Uniformisierende $z_h = x_h + iy_h$ zugeordnet und bilden dann

$$\mathbf{D}(u) = \sum_{h=1}^{r} \iint\limits_{\mathfrak{E}_h} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_h}\right)^2\right] dx_h dy_h.$$

Dabei ist u in $\mathfrak{E}_h$ als Funktion von $x_h y_h$ ausgedrückt zu denken, und $\mathfrak{E}_h$ bezeichnet zugleich das durch z_h von diesem Stück der Riemannschen Fläche entworfene ebene Bild. Die so ermittelte Zahl $\mathbf{D}(u)$ ist gemäß dem Invarianzgesetz unabhängig davon, *welche* Uniformisierende $z_h = x_h + iy_h$ in jedem Stück $\mathfrak{E}_h$ benutzt wird. *Sie ist aber auch unabhängig von der speziellen Art der verwendeten Zerschneidung in die uniformisierbaren Stücke* $\mathfrak{E}_h$. Wählen wir nämlich irgendwie anders Punkte $\mathfrak{p}'_1, \ldots, \mathfrak{p}'_{n'}$, zugehörende Uniformisierende z' und $z'_{l'}$-Kreise $K'_{l'}$ mit den Peripherien $\varkappa'_{l'}$ in solcher Weise, daß die $K'_{l'}$ die ganze Fläche bedecken! Die $\varkappa'_1, \ldots$ $\varkappa'_{n'}$ mögen $\mathfrak{F}$ in die Stücke $\mathfrak{E}'_1, \ldots, \mathfrak{E}'_{r'}$ zerlegen, und zu jedem $\mathfrak{E}'_{h'}$ sei $z'_{h'} = x'_{h'} + iy'_{h'}$ eine Uniformisierende. Wir bilden von neuem

$$\mathbf{D}'(u) = \sum_{h'=1}^{r'} \iint\limits_{\mathfrak{E}'_{h'}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'_{h'}}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'_{h'}}\right)^2\right] dx'_{h'} dy'_{h'}.$$

Dann ist, wie ich behaupte,

$$\mathbf{D}(u) = \mathbf{D}'(u).$$

Man bringe nämlich die Schnitte $\varkappa_l$, $\varkappa'_{l'}$ *gleichzeitig* an. Da sich diese Linien untereinander nur in endlich vielen Punkten schneiden, zerlegen sie die Fläche in endlich viele Stücke

$$\mathfrak{E}_{hj} \quad \mathfrak{E}'_{h'j'} \quad \left[\begin{array}{l} j = 1, 2, \cdots, i_h; \;\; h = 1, 2, \cdots, r \\ j' = 1, 2, \cdots, i'_{h'}; \; h' = 1, 2, \cdots, r' \end{array}\right].$$

In der ersten Bezeichnung ist jedes $\mathfrak{E}_{hj}$ ein Teil von $\mathfrak{E}_h$, in der zweiten jedes $\mathfrak{E}'_{h'j'}$ ein Teil von $\mathfrak{E}'_{h'}$. Nach dem Additionsgesetz ist

$$\mathbf{D}(u) = \sum_h \sum_j \iint\limits_{\mathfrak{E}_{hj}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_h}\right)^2\right] dx_h dy_h,$$

$$\mathbf{D}'(u) = \sum_{h'} \sum_{j'} \iint_{\mathfrak{E}'_{h'j'}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'_{h'}}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'_{h'}}\right)^2\right] dx'_{h'}\, dy'_{h'}$$

nach dem Invarianzgesetz

$$\iint_{\mathfrak{E}_{hj}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x_h}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y_h}\right)^2\right] dx_h\, dy_h = \iint_{\mathfrak{E}'_{h'j'}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x'_{h'}}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y'_{h'}}\right)^2\right] dx'_{h'}\, dy'_{h'};$$

daher

$$\mathbf{D}(u) = \mathbf{D}'(u).$$

Zu jeder stetig differentiierbaren Funktion u auf $\mathfrak{F}$ gibt es also eine Zahl $\mathbf{D}(u)$. Sie hat folgende Eigenschaften:

1. Sie ändert sich nicht, wenn man u durch $u + c$ ersetzt, wo c eine Konstante ist; sie ist niemals negativ und nur dann 0, wenn u auf der ganzen Fläche konstant ist.

2. Ist $\mathfrak{p}$ irgendein Punkt auf der Fläche, $z = x + iy$ eine zugehörige Ortsuniformisierende und $\mathsf{K}: |z| \leq a$ ein z-Kreis, so gilt

$$\mathbf{D}(u) = \iint_{\mathsf{K}} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy + R(u),$$

wo $R(u) \geq 0$ ist und sich nicht ändert, wenn man u durch irgendeine stetig differentiierbare Funktion auf $\mathfrak{F}$ ersetzt, die für alle nicht in K liegenden Punkte mit u übereinstimmt.

3. $\mathbf{D}(u)$ trägt quadratischen Charakter. Das gibt sich darin kund: sind u, v irgend zwei stetig differentiierbare Funktionen auf $\mathfrak{F}$ und bedeuten λ, μ willkürliche Konstante, so ist

$$\mathbf{D}(\lambda u + \mu v) = \lambda^2 \mathbf{D}(u) + 2\lambda\mu\, \mathbf{D}(uv) + \mu^2 \mathbf{D}(v)$$

eine quadratische Form in λ, μ.

Auch auf einer nicht geschlossenen Riemannschen Fläche läßt sich von einer stetig differentiierbaren Funktion u das Dirichletsche Integral bilden, das hier allerdings auch den Wert ∞ besitzen kann. Eine ungeschlossene Fläche wird man derartig durch Peripherien $\varkappa_l$ von abzählbar vielen „Kreisen" K_l zerschneiden müssen, daß jeder Punkt nur endlich vielen, aber mindestens einem der Kreise K_l angehört.

§ 13. Über das Poissonsche Integral.

Als Hilfsmittel für unsere Untersuchungen brauchen wir die Lösung der sog. *ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für den Kreis* mit Hilfe des *Poissonschen Integrals*. Ist auf dem Einheitskreis der komplexen z-Ebene eine reelle stetige Funktion gegeben, deren Wert an der Stelle $\zeta = e^{i\varphi}$ mit $u(\varphi)$ bezeichnet werden möge, so liefert die Gleichung

$$2\pi f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\zeta + z}{\zeta - z} u(\varphi)\, d\varphi$$

eine für $|z| < 1$ regulär-analytische Funktion $f(z)$, deren Realteil am Rande die Werte $u(\varphi)$ annimmt; d. h. diejenige Funktion u, welche im Innern des Einheitskreises = dem Realteil von $f(z)$, für Werte $\zeta = e^{i\varphi}$ auf dem Einheitskreise aber $= u(\varphi)$ gesetzt wird, ist eine in der ganzen abgeschlossenen Kreisfläche $|z| \leqq 1$ stetige Funktion.[1]) Benutzen wir Polarkoordinaten $z = re^{i\varphi}$, so können wir schreiben:

$$(15) \qquad 2\pi u = \int_0^{2\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\varphi - \vartheta)} u(\vartheta)\, d\vartheta.$$

Es gibt außer u nicht etwa noch eine andere im Innern des Einheitskreises reguläre Potentialfunktion $\bar{u}$, welche in dem erklärten Sinne am Rande des Kreises die Werte $u(\varphi)$ annimmt. Denn dann würde $\bar{u} - u$ eine in der abgeschlossenen Kreisfläche stetige Funktion sein, die im Innern als reguläre Potentialfunktion nirgends ein Maximum oder Minimum annehmen kann, und die am Rande $= 0$ ist. Demnach müßte sowohl das Maximum wie das Minimum von $\bar{u} - u$ (für $|z| \leqq 1$) $= 0$ sein, d. h. $\bar{u} \equiv u$.

Das Poissonsche Integral (15) liefert einen wichtigen Konvergenzsatz: *Ist $u_1, u_2, u_3, \ldots$ eine Folge von Potentialfunktionen, die alle für $|z| < 1$ regulär sind und gleichmäßig für $|z| \leqq q$ gegen eine Grenzfunktion u konvergieren, wenn q irgendeine positive Zahl < 1 bedeutet, so ist die Grenzfunktion u gleichfalls eine für $|z| < 1$ reguläre Potentialfunktion.* Unter den angegebenen Umständen muß nämlich zufolge des Poissonschen Integrals

$$2\pi u_n(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \frac{q^2 - r^2}{q^2 + r^2 - 2qr\cos(\varphi - \vartheta)} u_n(qe^{i\vartheta})\, d\vartheta$$

sein für $r < q$. Der Grenzübergang liefert

$$2\pi u(re^{i\varphi}) = \int_0^{2\pi} \frac{q^2 - r^2}{q^2 + r^2 - 2qr\cos(\varphi - \vartheta)} u(qe^{i\vartheta})\, d\vartheta,$$

und hier steht auf der rechten Seite eine für $r < q$ reguläre Potentialfunktion. Ist q_1 eine positive Zahl < 1 und wähle ich $q > q_1$ und < 1, so erkennt man noch, daß in einem beliebigen konzentrischen Kreise, dessen Radius < 1 ist ($|z| \leqq q_1$) nicht nur u_n gleichmäßig gegen u, sondern

1) H. A. Schwarz, Gesammelte Abhandlungen, Bd. II, S. 186—198. Den Beweis findet man in fast allen Lehrbüchern der Funktionentheorie dargestellt.

auch alle Ableitungen von u_n beliebig hoher Ordnung gleichmäßig gegen die entsprechenden Ableitungen von u konvergieren.

Der Zusammenhang der Potentialtheorie mit dem Dirichletschen Integral geht aus folgendem Satz hervor:

Ist v eine im Einheitskreis $\mathsf{K}: |z| \leqq 1$ stetige, im Innern desselben stetig differentiierbare Funktion mit endlichem Dirichletschen Integral

$$\mathbf{D}(v) = \iint\limits_{\mathsf{K}} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \quad (z = x + iy)$$

und u diejenige für $|z| < 1$ reguläre Potentialfunktion, deren Randwerte auf $|z| = 1$ mit denen von v übereinstimmen, so ist

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(v). \tag{16}$$

Dabei soll das Dirichletsche Integral hier als *„uneigentliches" Integral* gemeint sein, nämlich als Limes des Integrals

$$\mathbf{D}_q(v) = \iint\limits_{|z| \leqq q} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy \quad (q < 1)$$

für $\lim q = 1$. Wir verwenden allgemein, wenn $0 \leqq q_1 < q_2 \leqq 1$ ist, die Bezeichnung

$$\mathbf{D}_{q_1}^{q_2}(v) = \iint\limits_{q_1 \leqq |z| \leqq q_2} \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx\, dy.$$

Der gewöhnliche Beweis von (16) verläuft so: Man setzt $w = v - u$; partielle Integration (Greensche Formel) liefert:

$$\mathbf{D}(wu) = \int_0^{2\pi} \left(w \frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=1} d\varphi - \iint\limits_{\mathsf{K}} w \Delta u\, dx\, dy \quad \left(\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right),$$

und da im Innern von $\mathsf{K}: \Delta u = 0$, am Rande $w = 0$ ist,

$$\mathbf{D}(wu) = 0;$$

$$\mathbf{D}(v) = \mathbf{D}(u + w) = \mathbf{D}(u) + 2\,\mathbf{D}(wu) + \mathbf{D}(w)$$
$$= \mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(w) \geqq \mathbf{D}(u).$$

Will man diesen Schluß streng machen, so darf man zunächst alle Dirichletschen Integrale nur über $|z| \leqq q (< 1)$ erstrecken und hat hernach q gegen 1 konvergieren zu lassen. Es kommt dann darauf an, einzusehen, daß

$$\mathbf{D}_q(wu) = q \int_0^{2\pi} \left(w \frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=q} d\varphi$$

für $\lim q = 1$ gegen 0 geht. Nun weiß man wohl, daß $w(qe^{i\varphi})$ mit gegen 1 gehendem q gleichmäßig in φ zu 0 konvergiert, aber es läßt sich keines-

wegs sagen, daß $\frac{\partial u}{\partial r}$ im ganzen Einheitskreise beschränkt bleibt; man kann nur behaupten, daß $(1 - r)\frac{\partial u}{\partial r}$ mit $\lim r = 1$ gleichmäßig in φ gegen 0 konvergiert, und das reicht natürlich nicht aus, um auf $\lim\limits_{q=1} \mathbf{D}_q(wu) = 0$ zu schließen. Diese Schwierigkeiten wird man sich vor Augen halten müssen, um den folgenden, von Hadamard und Zaremba[1]) herrührenden Beweis recht zu würdigen.

Die Randwerte $v(e^{i\varphi})$ mögen kürzer $v(\varphi)$ genannt werden. Entwickelt man das Poissonsche Integral (15) nach Potenzen von r, so bekommt man

$$u = \frac{a_0}{2} + a_1 r \cos\varphi + a_2 r^2 \cos 2\varphi + \cdots$$
$$+ b_1 r \sin\varphi + b_2 r^2 \sin 2\varphi + \cdots$$
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi, \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} v(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi.$$

Diese Entwicklung entspricht im Gebiet der Potentialfunktionen der Potenzreihe in der Theorie der analytischen Funktionen. In der Tat sind $r^n \cos n\varphi$, $r^n \sin n\varphi$ nichts anderes als realer und imaginärer Teil von z^n. Die Potentialfunktionen

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} r^n \cos n\varphi, \quad Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} r^n \sin n\varphi$$

besitzen die folgenden Eigenschaften:

$$\text{(I)}\begin{cases} \mathbf{D}_q(P_n, Q_m) = 0 \quad \text{ohne Ausnahme}, \\ \mathbf{D}_q(P_n, P_m) = 0, \quad \mathbf{D}_q(Q_n, Q_m) = 0 \quad \text{außer für } n = m, \\ \mathbf{D}_q(P_n) = \mathbf{D}_q(Q_n) = q^{2n}, \end{cases}$$

und wenn wir allgemein

$$\iint\limits_{|z| \leqq q} uv\, dx\, dy = \mathbf{J}_q(uv)$$

setzen, auch noch diese:

$$\text{(II)}\begin{cases} \mathbf{J}_q(P_n, Q_m) = 0 \quad \text{ohne Ausnahme}, \\ \mathbf{J}_q(P_n, P_m) = \mathbf{J}_q(Q_n, Q_m) = 0 \quad \text{außer für } n = m, \\ \mathbf{J}_q(P_n) = \mathbf{J}_q(Q_n) = \frac{q^{2n+2}}{2n(n+1)}. \end{cases}$$

Die Entwicklung von u können wir schreiben:

---

1) Hadamard, Sur le principe de Dirichlet, Bulletin de la Société mathématique de France, Bd. 34 (1906), S. 135—139. Zaremba, Sur le principe du minimum, Bulletin de l'Académie des sciences de Cracovie, Juli 1909, S. 208 ff.

$$(17) \qquad u - \frac{a_0}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n P_n(xy) + B_n Q_n(xy)],$$

wo $A_n = a_n \sqrt{\pi n}$, $B_n = b_n \sqrt{\pi n}$ Konstante sind, die sich als Flächenintegrale in der Form

$$(18) \qquad A_n = \mathbf{D}(v, P_n), \quad B_n = \mathbf{D}(v, Q_n)$$

darstellen lassen. Nach der Greenschen Formel ist nämlich z. B.

$$\mathbf{D}_q(v, P_n) = q \int_0^{2\pi} \left(v \frac{\partial P_n}{\partial r}\right)_{r=q} d\varphi = \sqrt{\frac{n}{\pi}}\, q^n \int_0^{2\pi} v(qe^{i\varphi}) \cos n\varphi\, d\varphi.$$

Durch den Grenzübergang $\lim q = 1$ folgt daraus in der Tat

$$\mathbf{D}(v, P_n) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{2\pi} v(\varphi) \cos n\varphi\, d\varphi = \sqrt{n\pi} \cdot a_n = A_n.$$

Die Reihe (17) konvergiert für $|z| \leqq q (< 1)$ gleichmäßig und absolut samt allen ihren Ableitungen. Man kann daher $\mathbf{D}_q(u)$ aus ihr durch gliedweises Quadrieren und nachfolgendes gliedweises Integrieren berechnen. Die Formeln (I) ergeben dann:

$$(19) \qquad \mathbf{D}_q(u) = \sum_{n=1}^{\infty} q^{2n} (A_n^2 + B_n^2).$$

Anderseits folgt auf Grund der gleichen Formeln und der Ausdrücke (18)

$$\mathbf{D}\left(v - \sum_{\nu=1}^{n} [A_\nu P_\nu + B_\nu Q_\nu]\right) = \mathbf{D}(v) - \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu^2 + B_\nu^2).$$

Es muß die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2)$$

demnach, wie weit man sie auch fortsetzt, immer $\leqq \mathbf{D}(v)$ bleiben; das hat ihre Konvergenz zur Folge. Verbinden wir damit die Gleichung (19), so haben wir

$$\mathbf{D}_q(u) \leqq \mathbf{D}(v),$$

und durch den Grenzübergang $\lim q = 1$ folgt die Existenz von $\mathbf{D}(u)$, und daß

$$(20) \qquad \mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(v)$$

ist.

Unter allen Funktionen, welche in den Randwerten mit v übereinstimmen, erteilt also die Potentialfunktion dem Dirichletschen Integral seinen kleinsten Wert. Setzen wir $v - u = w$, so muß zufolge dieses Satzes nicht nur für $\lambda = 1$, sondern jeden reellen konstanten Wert von λ

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(u + \lambda w)$$

sein, oder anders geschrieben:

$$2\lambda \mathbf{D}(uw) + \lambda^2 \mathbf{D}(w) \geqq 0.$$

Das hat die Gleichung

$$\mathbf{D}(uw) = 0$$

zur Folge, die uns in

$$\mathbf{D}(v) = \mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(w) = \mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(v - u),$$

eine schärfere Aussage liefert, als die Ungleichung (20) enthielt. Insbesondere zeigt sich, daß in (20) nur dann das Gleichheitszeichen gelten kann, wenn $v - u = \text{const.}$, oder da diese Differenz am Rande verschwindet, v mit u identisch ist.

Aus (19) folgt durch den Grenzübergang $\lim q = 1$:

$$\mathbf{D}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2). \tag{21}$$

Denn einerseits ist

$$\mathbf{D}_q(u) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2), \quad \text{also} \quad \mathbf{D}(u) \leqq \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2),$$

anderseits liefert

$$\mathbf{D}_q(u) \geqq \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu^2 + B_\nu^2) q^{2\nu}$$

die für jedes n gültige Ungleichung

$$\mathbf{D}(u) \geqq \sum_{\nu=1}^{n} (A_\nu^2 + B_\nu^2).$$

$a_1 = \frac{A_1}{\sqrt{\pi}}$, $b_1 = \frac{B_1}{\sqrt{\pi}}$ sind die Werte von $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ im Nullpunkt. Behalten wir in (21) rechts nur das erste Glied bei, so finden wir demnach

$$\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]_{z=0} \leqq \frac{1}{\pi} \mathbf{D}(u). \tag{22}$$

Wenden wir diese Ungleichung, statt auf den Einheitskreis, auf den Kreis $\varkappa_z$ mit dem Mittelpunkt z ($\frac{1}{2} < |z| = r < 1$) und dem Radius $1 - r$ an, so folgt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 \leqq \frac{1}{\pi(1-r)^2} \iint\limits_{\varkappa_z} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy$$

$$\leqq \frac{1}{\pi(1-r)^2} \mathbf{D}_{2r-1}(u). \tag{23}$$

Der Kreis $\varkappa_z$ ist nämlich ganz in dem Kreisring $2r - 1 \leqq |z| \leqq 1$ ent-

halten. Da $\lim_{r=1} \mathbf{D}_{2r-1}(u) = 0$ ist, schließt diese Ungleichung eine Aussage über das Verhalten der Ableitungen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ am Rande des Einheitskreises in sich.

Wie (21) auf dem Wege über (19) sich aus den Formeln (I) ergibt, erhalten wir mit Benutzung des Formelsystems (II):

$$\mathbf{J}\left(u - \frac{a_0}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n^2 + B_n^2}{2n(n+1)}.$$

In Verbindung mit (21) liefert das die Ungleichung

$$\mathbf{J}\left(u - \frac{a_0}{2}\right) \leqq \frac{1}{4}\mathbf{D}(u). \tag{24}$$

Diese Ungleichung steht in engem Zusammenhang mit einem interessanten elementaren Problem der Analysis. Fragt man sich, wie gut man eine Funktion v von zwei Argumenten xy in einem Bereich $\mathfrak{G}$ durch eine Konstante annähern kann, so sagt darüber der erste Mittelwertsatz der Differentialrechnung aus, daß sich, wenn ich als Annäherungskonstante den Wert von v in einem festen Punkt $(x_0 y_0)$ nehme,

$$v(xy) - v(x_0 y_0) \mid \leqq \operatorname{Max}_{\mathfrak{G}} \sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2} \times \text{Entfernung } (xy;\ x_0 y_0)$$

ergibt. Hier wird als Fehler das Maximum des absoluten Betrages der Differenz $|v - v_0|$ angesehen, und dessen Größe erweist sich als wesentlich bestimmt durch das Max. $\sqrt{\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2}$. Beurteilen wir aber den Fehler, wie es der Methode der kleinsten Quadrate entspricht, nach dem Quadratintegral $\iint_{\mathfrak{G}} (v - v_0)^2 dx dy$, so wird man erwarten dürfen, daß die durch geeignete Wahl der Konstanten v_0 erzielbare Annäherung bestimmt ist durch den Wert von

$$\iint \left[\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2\right] dx dy.$$

Diese Vermutung wird durch die obige Ungleichung bestätigt für den Fall, daß der Bereich $\mathfrak{G}$ der Einheitskreis und v eine Potentialfunktion ist.

Von der letzten Voraussetzung wollen wir uns befreien, indem wir, unter Verwendung der oben benutzten Bezeichnungen, allgemein beweisen:

$$\mathbf{J}\left(v - \frac{a_0}{2}\right) \leqq \frac{1}{2}\mathbf{D}(v). \tag{25}$$

$\frac{a_0}{2}$ ist im allgemeinen nicht der Wert von v im Mittelpunkt, sondern der Mittelwert von v auf dem Rande des Kreises:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varphi)\,d\varphi .$$

Wir bedienen uns der Schwarzschen Ungleichung

$$\left(\int_0^1 f g\,dx\right)^2 \leqq \int_0^1 f^2 dx \cdot \int_0^1 g^2 dx,$$

für die man auch schreiben kann

$$\sqrt{\int_0^1 (f \pm g)^2 dx} \leqq \sqrt{\int_0^1 f^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 g^2 dx}$$

[$f(x)$, $g(x)$ sind irgend zwei stetige Funktionen im Intervall $0 \leqq x \leqq 1$]. Sie ergibt sich daraus, daß die quadratische Form in $\lambda\mu$:

$$\int_0^1 (\lambda \cdot f(x) + \mu \cdot g(x))^2 dx = \mathsf{A}\lambda^2 + 2\mathsf{B}\lambda\mu + \Gamma\mu^2$$

nicht negativ werden kann und also ihre Diskriminante

$$\mathsf{A}\Gamma - \mathsf{B}^2 \geqq 0$$

sein muß.

Für eine im abgeschlossenen Einheitskreis stetige, am Rande verschwindende, im Innern stetig differentiierbare Funktion, wie es $w = v - u$ ist, erhalten wir mittels der Schwarzschen Ungleichung

$$[w(r_2 e^{i\varphi}) - w(r_1 e^{i\varphi})]^2 = \left(\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial w(r e^{i\varphi})}{\partial r}\,dr\right)^2$$

$$\leqq \int_{r_1}^{r_2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 r\,dr \cdot \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \qquad (0 < r_1 < r_2 < 1)$$

Integriert man diese Ungleichung nach φ und läßt dann r_2 gegen 1 konvergieren, so ergibt sich, da

$$\mathbf{D}_{r_1}^{r_2}(w) = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 r + \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2 \frac{1}{r}\right] d\varphi\,dr$$

ist, die Beziehung

$$(26) \qquad \int_0^{2\pi} [w(r e^{i\varphi})]^2 d\varphi \leqq \lg\frac{1}{r} \cdot \mathbf{D}_r^1(w).$$

Von dieser Ungleichung werden wir sogleich noch eine wichtige Anwendung machen. Vorerst ersetzen wir rechts $\mathbf{D}_r^1(w)$ durch das größere $\mathbf{D}(w)$, multiplizieren mit $r\,dr$ und integrieren nach r von 0 bis 1. Dann ergibt sich, da

$$\int_0^1 r \lg \frac{1}{r}\, dr = \frac{1}{4}$$

$$\mathbf{J}(w) \leqq \tfrac{1}{4}\mathbf{D}(w). \tag{27}$$

Wir kombinieren (27) mit (24). Es ist

$$\mathbf{J}\left(v - \frac{a_0}{2}\right) \leqq 2\left[\mathbf{J}\left(u - \frac{a_0}{2}\right) + \mathbf{J}(w)\right]$$

— zufolge der Ungleichung $(\alpha + \beta)^2 \leqq 2[\alpha^2 + \beta^2]$ — daher nach (24) und (27)

$$\leqq \tfrac{1}{2}[\mathbf{D}(u) + \mathbf{D}(w)] = \tfrac{1}{2}\mathbf{D}(v).$$

Damit ist (25) bewiesen. Wir bemerken nochmals, daß sich in (25) der Faktor $\frac{1}{2}$ durch den kleineren $\frac{1}{4}$ ersetzen läßt, wenn v eine Potentialfunktion ist oder am Rande verschwindet.

Ist v in einem Gebiet, das den Einheitskreis im Innern enthält, stetig differentiierbar, so wird dadurch, daß wir im Einheitskreise v durch u ersetzen, der Wert des Dirichlet-Integrals herabgedrückt. Da wir jedoch in den beabsichtigten Anwendungen nur stetig differentiierbare Funktionen gebrauchen können, die Funktion $\bar{v}$ aber, welche außerhalb des Einheitskreises mit v, innerhalb desselben mit u übereinstimmt, im allgemeinen über den Rand des Einheitskreises hinüber diese Eigenschaft nicht besitzt, müssen wir dort den Funktionsverlauf von $\bar{v}$ so „glätten", daß doch der Wert des Dirichletschen Integrals von $\bar{v}$ dabei sich so wenig ändert, als man nur will. Wir wollen also zeigen: es gibt eine stetig differentiierbare Funktion $\tilde{v}$, welche außerhalb des Einheitskreises mit v übereinstimmt, und deren über den Einheitskreis erstrecktes Dirichletsches Integral $\mathbf{D}(\tilde{v})$ sich so wenig, wie man will, von $\mathbf{D}(\bar{v}) = \mathbf{D}(u)$ unterscheidet.

Ich wähle $q > \frac{1}{2}$ und < 1 und bilde mit $\chi(r) = \left(\frac{r-q}{1-q}\right)^2$ die Funktion[1])

$$\tilde{v} = \begin{cases} u \text{ für } |z| \leqq q \\ u + \chi(r)(v-u) \text{ für } q \leqq |z| = r \leqq 1. \end{cases}$$

Da $\chi(r)$ bei $r = q$ von 2. Ordnung verschwindet, geht diese Funktion $\tilde{v}$ samt ihren ersten Differentialquotienten stetig über den Kreis $|z| = q$ hinüber. Gegen den Rand des Einheitskreises zu konvergiert $\tilde{v} - v$ mit seinen beiden ersten Differentialquotienten gleichmäßig gegen 0. Wenn man $\tilde{v}$ außerhalb des Einheitskreises also mit v zusammenfallen läßt, ist $\tilde{v}$ auch über den Rand des Einheitskreises stetig und stetig differentiierbar. Denn es ist beispielsweise

$$\frac{\partial}{\partial x}(\tilde{v} - v) = [\chi(r) - 1]\frac{\partial(v-u)}{\partial x} + (v-u)\frac{d\chi}{dr}\frac{x}{r} \text{ (für } q < r < 1).$$

1) Nach S. Zaremba, Krakauer Berichte, Juli 1909, S. 246 ff.

$\chi(r) - 1$ wird bei $r = 1$ von 1. Ordnung Null, und aus der Ungleichung (23) geht daher hervor, daß der erste auf der rechten Seite stehende Summand bei Annäherung an die Peripherie des Einheitskreises vom Innern aus gleichmäßig gegen 0 geht; daß der zweite Summand dasselbe tut, bedarf kaum der Erwähnung.

Wir schätzen jetzt das über den Einheitskreis zu erstreckende Dirichlet-Integral

$$\mathbf{D}(\tilde{v} - u) = \mathbf{D}_q^1[\chi(r)(v - u)]$$

ab. Da

$$\frac{\partial}{\partial x}[\chi(r)(v - u)] = \chi(r)\frac{\partial(v - u)}{\partial x} + (v - u)\frac{2(r - q)}{(1 - q)^2}\frac{x}{r}$$

ist, so erhält man für dieses Integral einen Wert $\leqq$ dem doppelten von

$$\iint\limits_{q \leqq |z| \leqq 1} \chi^2(r)\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy + \frac{4}{(1 - q)^4}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_q^1 w^2(r - q)^2 r\,dr\,d\varphi.$$

Der erste Summand hier ist wegen $\chi^2 \leqq 1$:

$$\leqq \mathbf{D}_q^1(w)$$

der zweite, da nach (26)

$$\int\limits_0^{2\pi} w^2 d\varphi \leqq \left(\frac{1}{r} - 1\right)\mathbf{D}_q^1(w) \quad (q < r < 1) \text{ ist:}$$

$$\leqq \frac{4}{(1 - q)^4} \cdot \mathbf{D}_q^1(w) \cdot \int\limits_q^1 (1 - r)(r - q)^2 dr = \frac{1}{3}\mathbf{D}_q^1(w).$$

Im ganzen kommt also

$$\mathbf{D}(\tilde{v}) - \mathbf{D}(u) = \mathbf{D}(\tilde{v} - u) \leqq \tfrac{8}{3}\mathbf{D}_q^1(w),$$

und das kann durch geeignete Wahl von q so klein gemacht werden wie man will.

§ 14. Ansatz zum Beweis der Existenztheoreme. Aufstellung der Elementardifferentiale.

Statt eine analytische Funktion auf der vorgegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ zu konstruieren, suchen wir zunächst nur den Realteil einer solchen, d. i. eine reelle auf der Fläche harmonische Funktion. Eine überall reguläre Potentialfunktion auf der Fläche existiert aber (wenn man von der Konstanten absieht) nicht. Wir werden daher für die harmonische Funktion an einer Stelle eine Singularität zulassen, und zwar die einfachste, welche es gibt: sie soll sich dort verhalten wie der Realteil einer analytischen Funktion, die einen Pol 1. Ordnung besitzt. Wir gehen also darauf aus, folgendes Existenztheorem zu beweisen:

Ist O mit der Ortsuniformisierenden $z_0 = x_0 + iy_0$ ein willkürlicher

Punkt auf $\mathfrak{F}$, so gibt es eine in allen von O verschiedenen Punkten reguläre Potentialfunktion U auf $\mathfrak{F}$, die in der Umgebung von O sich von $\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2}$ um eine in O reguläre Potentialfunktion unterscheidet.

U ist offenbar bis auf eine additive Konstante durch diese Eigenschaften eindeutig bestimmt. Mag auch $\mathfrak{F}$ keine wirkliche Fläche im Raum sein, sondern eine Riemannsche Fläche in dem abstrakten Sinne, wie er in Kap. I eingeführt ist, es wird trotzdem erlaubt sein, U als Potential einer inkompressiblen, stationären, wirbelfreien Flüssigkeitsströmung auf $\mathfrak{F}$ zu betrachten, einer Strömung, die überall, abgesehen von dem einen Punkte O, auch quellenfrei ist; im Punkte O aber sitzt eine „Doppelquelle" vom Momente 2π, deren Richtung mit der positiven x_0-Achse übereinstimmt. Es gehört allerdings einige Kühnheit dazu, aus dieser hydrodynamischen Deutung auf die Existenz von U zu schließen.[1])

Würde sich von U das Dirichletsche Integral bilden lassen, so hätten wir dieses als die Energie der Flüssigkeitsströmung anzusprechen. Leider wird das Integral aber wegen des Verhaltens von U an der Stelle O unendlich. Wir verfahren deshalb so. Wir schlagen um O einen z_0-Kreis $\mathsf{K}_0 : |z_0| \leqq a_0$ und bilden in ihm die Funktion

$$\Phi = \frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} + \frac{x_0}{a_0^2}.$$

Sie hat die Eigenschaft, auf der Peripherie von K_0 die normale Ableitung 0 zu besitzen. Benutzen wir nämlich Polarkoordinaten $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, so ist

$$\Phi = \frac{\cos\varphi_0}{r_0} + \frac{r_0\cos\varphi_0}{a_0^2},$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial r_0} = -\frac{\cos\varphi_0}{r_0^2} + \frac{\cos\varphi_0}{a_0^2}, \text{ für } r_0 = a_0 : \frac{\partial\Phi}{\partial r_0} = 0.$$

Wir betrachten jetzt

$$\begin{aligned} &U \text{ überall auf } \mathfrak{F}, \text{ außer in } \mathsf{K}_0 \\ &U - \Phi \text{ in } \mathsf{K}_0. \end{aligned}$$

Diese Funktion hat längs der Peripherie $\varkappa_0$ von K_0 einen Sprung, ist aber sonst stetig differentiierbar. Auch läßt sich der außerhalb K_0 herrschende Wertverlauf von u noch ein Stück über $\varkappa_0$ nach innen hinein als stetig differentiierbare (sogar als reguläre Potential-) Funktion fortsetzen (U); ebenso läßt sich das innerhalb K_0 herrschende u ein Stück über $\varkappa_0$ hinaus als stetig differentiierbare (sogar als reguläre Potential-) Funktion ($U - \Phi$) fortsetzen. Infolgedessen kann man das Dirichletsche Integral $\mathbf{D}(u)$ in der oben auseinandergesetzten Weise bilden, wenn man unter die Kreis-

---

1) Auf diese und ähnliche physikalische Anschauungen stützt sich die Darstellung in der erwähnten Kleinschen Schrift vom Jahre 1882; vgl. die dort gezeichneten, sehr instruktiven Strömungsbilder.

peripherien $\varkappa_l$, längs denen $\mathfrak{F}$ in die Stücke $\mathfrak{E}_h$ zerschnitten wurde, immer auch den Kreis $\varkappa_0$ aufnimmt.

Unter allen Funktionen v, welche längs $\varkappa_0$ denselben Sprung besitzen wie u, die sonst aber stetig differentiierbar sind, erteilt u dem Dirichletschen Integral $\mathbf{D}(v)$ seinen kleinsten Wert. Die hier zum Vergleich mit u herangezogenen Funktionen v wollen wir noch etwas genauer charakterisieren. Ich schlage dazu um O einen z_0-Kreis $\mathsf{K}_0^*: |z_0| \leqq b_0$, von etwas größerem Radius b_0 als a_0. $\mathfrak{F} - \mathsf{K}_0$ nenne ich die *„gelochte" Fläche*, K_0 das *„Loch"*, K_0^* den *„Deckel"*, den Kreisring $a_0 < |z_0| < b_0$, in dem der Deckel über die gelochte Fläche hinübergreift, den *„Verschlußring"*. Zur Konkurrenz zugelassen wird eine Funktion v dann, wenn sie in der gelochten Fläche stetig differentiierbar ist und im Loch mit einer im ganzen Deckel stetig differentiierbaren Funktion v^* übereinstimmt, zu der sie im Verschlußring in der Beziehung $v = v^* + \Phi$ steht. Ist v das Zeichen für irgendeine Konkurrenzfunktion, so soll allemal v^* die hier charakterisierte stetig differentiierbare Funktion im Deckel bedeuten. Die Differenz zweier Konkurrenzfunktionen ist auf ganz $\mathfrak{F}$ stetig differentiierbar.

Um nun den Existenzbeweis von U oder u zu führen, stellen wir uns das *Minimalproblem*, unter allen Konkurrenzfunktionen v diejenige u herauszufinden, für welche das Dirichletsche Integral $\mathbf{D}(v)$ den kleinsten Wert erhält. Das Thomson-Dirichletsche Prinzip behauptet, daß eine solche Minimalfunktion u existiert.[1]) Auf dieses Prinzip hat Riemann seine Existenzbeweise gegründet, doch stimmt sein Ansatz nicht völlig mit dem unseren überein.[2]) Die Weierstraßsche Kritik zeigte, daß die Evidenz, welche dem Dirichletschen Prinzip inne zu wohnen scheint, nur vorgetäuscht ist.[3]) Man suchte deshalb durch andere Methoden die Riemannschen Existenzsätze sicherzustellen, und dies war zuerst Schwarz und C. Neumann, namentlich mit Hilfe des sog. alternierenden Verfahrens, in glänzender Weise gelungen.[4]) Später ist jedoch das Dirichletsche Prinzip von Hilbert streng bewiesen worden.[5]) An seinen Beweis knüpft eine größere Reihe von Arbeiten anderer Autoren an, durch die der Be-

---

1) Seit 1847 von W. Thomson (Lord Kelvin) in verschiedenen Arbeiten angewandt. Der Name „Dirichletsches Prinzip" rührt von Riemann her, der diese Schlußweise aus Dirichlets Vorlesungen kannte.

2) Die hier zugrunde gelegte Form des Ansatzes wurde vom Verf. (außer in der Vorlesung, aus der die vorliegende Schrift entstanden ist) in der Sitzung vom 16. Jan. 1912 der Göttinger Mathematischen Gesellschaft vorgetragen.

3) Über das sog. Dirichletsche Prinzip (1870), Weierstraß Werke, Bd. 2, S. 49—54.

4) H. A. Schwarz, Berliner Berichte 1870 (Ges. Abhandlungen II, S. 133—171). C. Neumann, sächsische Berichte 1870; ders., Vorlesungen über Riemanns Theorie der Abelschen Integrale, 2. Aufl., Leipzig 1884, S. 388—471.

5) Hilbert, „Über das Dirichletsche Prinzip", Festschrift zur Feier des 150jährigen Bestehens der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, 1901, abgedruckt in Math. Ann. Bd. 59, S. 161—186; „Zur Theorie der konformen Abbildung", Göttinger Nachrichten, 1909, S. 314—323.

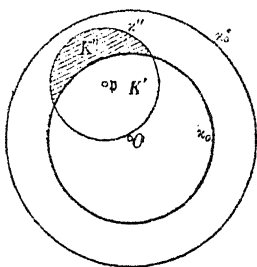
weis zwar nicht dem Grundgedanken nach, aber in manchen Einzelheiten vereinfacht wurde.[1]) Das Dirichletsche Prinzip gehört seit diesen Untersuchungen wieder zu den mächtigsten Hilfsmitteln der Analysis.

Zur Rechtfertigung des Ansatzes unseres Problems als einer Minimalaufgabe soll zunächst gezeigt werden, daß die Minimalfunktion u, falls sie existiert (sie ist dann selbst eine zur Konkurrenz zugelassene Funktion), die gewünschten Eigenschaften besitzt, d. h. u ist in jedem Punkt der gelochten Fläche, das zugehörige u^* in jedem inneren Punkte des Deckels regulär-harmonisch.

1. Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt der gelochten Fläche, z eine zugehörige Ortsuniformisierende, K ein z-Kreis um $\mathfrak{p}$, der ganz in der gelochten Fläche liegt, so kann ich u, falls es in K nicht harmonisch ist, durch diejenige Potentialfunktion $\bar{u}$ in K ersetzen, welche am Rande von K mit u übereinstimmt. Für diese ist dann das über K erstreckte Dirichletsche Integral $\mathfrak{D}_K(\bar{u}) < \mathfrak{D}_K(u)$. Durch das am Schluß von § 13 geschilderte Glättungsverfahren bekomme ich eine über den Rand von K hinüber stetig differentiierbare Funktion $\tilde{u}$, welche, außer in K, mit u übereinstimmt, deren über K erstrecktes Dirichletsches Integral aber so wenig von $\mathfrak{D}_K(\bar{u})$ abweicht, wie ich nur will. Insbesondere kann ich demnach erzielen, daß auch $\mathfrak{D}_K(\tilde{u})$ noch $< \mathfrak{D}_K(u)$ ist. $\tilde{u}$ ist eine Konkurrenzfunktion, für welche das über ganz $\mathfrak{F}$ erstreckte Integral $\mathfrak{D}(\tilde{u})$ einen kleineren Wert besitzt als für u. Dieser Widerspruch zeigt, daß u in K eine reguläre Potentialfunktion sein muß.

2. Es sei $\mathfrak{p}$ ein innerer Punkt des Deckels und K in der z_0-Ebene ein ganz dem Deckel angehöriger Kreis um $\mathfrak{p}$. Ist u^* nicht harmonisch in $\mathfrak{p}$, so kann man u^* durch eine im ganzen Deckel stetig differentiierbare Funktion $\widetilde{u^*}$ ersetzen, die außerhalb K mit u^* übereinstimmt und für welche $\mathfrak{D}_K(\widetilde{u^*}) < \mathfrak{D}_K(u^*)$ ist. Es gibt dann eine einzige Konkurrenzfunktion $\tilde{u}$, die, außer in K, $= u$ ist und deren zugehöriges $(\tilde{u})^*$ im Deckel mit $\widetilde{u^*}$ übereinstimmt.

Fig. 23.

Für diese ist, wie ich jetzt zeigen will, das über die ganze Fläche erstreckte Integral $\mathfrak{D}(\tilde{u}) < \mathfrak{D}(u)$, und die Annahme, daß u^* in $\mathfrak{p}$ keine regulär-harmonische Funktion war, ist damit widerlegt. Beim Beweise nehmen wir der Allgemeinheit wegen an, daß K den

1) Ich nenne insbesondere die in den Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, Bd. 22—24 (1906—07) erschienenen Abhandlungen: B. Levi, Sul principio di Dirichlet; Fubini, Il principio di minimo e i teoremi di esistenza per i problemi al contorno relativi alle equazione alle derivate parziali di ordini pari; Lebesgue, Sur le problème de Dirichlet; die Arbeit von S. Zaremba, Sur le principe du minimum, in den Krakauer Berichten, Juli 1909, und die von R. Courant, Über die Methode des Dirichletschen Prinzips, in Bd. 72 der Math. Ann. (1912).

Lochrand $\varkappa_0$ schneidet. Es zerfällt dann (Fig. 23) K durch $\varkappa_0$ in zwei Teile K′, K″, von denen K′ zu K_0 gehöre. Die zu beweisende Gleichung

$$\mathbf{D}(u) - \mathbf{D}(\tilde{u}) = \mathbf{D}_K(u^*) - \mathbf{D}_K(\widetilde{u^*}) (> 0)$$

ist mit der folgenden identisch:

$$\mathbf{D}_{K''}(u^* + \Phi) - \mathbf{D}_{K''}(\widetilde{u^*} + \Phi) = \mathbf{D}_{K''}(u^*) - \mathbf{D}_{K''}(\widetilde{u^*}). \tag{28}$$

Da Φ in K″ und auch noch über den Rand von K″ hinaus eine reguläre Potentialfunktion ist, gilt z. B.

$$\mathbf{D}_{K''}(u^* + \Phi) = \mathbf{D}_{K''}(u^*) + \mathbf{D}_{K''}(\Phi) - 2\int u^* \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds,$$

wobei das letzte Integral über den Rand von K″ zu erstrecken ist (ds bedeutet das Bogenelement dieses Randes, und die Randnormale n weist ins Innere von K″). Da aber $\frac{\partial \Phi}{\partial n}$ auf $\varkappa_0$ gleich 0 ist, braucht jenes Integral nur über denjenigen Teil $\varkappa''$ der Peripherie von K erstreckt zu werden, der außerhalb K_0 verläuft. Unsere Behauptung reduziert sich danach auf

$$\int (\widetilde{u^*} - u^*) \frac{\partial \Phi}{\partial n} ds = 0.$$

In dieser Form ist sie selbstverständlich, da längs der Peripherie von K: $\widetilde{u^*} = u^*$ ist. Man sieht hieraus, daß es für die Richtigkeit unseres Ansatzes entscheidend war, dem singulären Bestandteil $\frac{x_0}{x_0^2 + y_0^2}$ das Glied $\frac{x_0}{a_0^2}$ hinzuzufügen, welches bewirkte, daß auf dem Lochrande die normale Ableitung von Φ gleich 0 wurde.

Da wir die Gültigkeit des Dirichletschen Prinzips auch für ungeschlossene Riemannsche Flächen erweisen werden, können wir auf einer solchen gleichfalls u, u^* und U bilden. Die Konkurrenzbedingungen für die Funktionen v sind dann noch durch die weitere Forderung, daß $\mathbf{D}(v)$ endlich sein soll, einzuschränken. Die Potentialfunktion U kann auf einer ungeschlossenen Fläche nicht mehr vollständig durch ihre Singularität an der Stelle O charakterisiert werden. Sie ist aber eindeutig bis auf eine additive Konstante bestimmt, wenn wir in ihre Beschreibung außer der Angabe der charakteristischen Singularität in O noch diese Tatsache aufnehmen: Für jede stetig differentiierbare Funktion w, die $= 0$ ist für alle Punkte in einer (wenn auch noch so kleinen) Umgebung von O und welche ein endliches Dirichletsches Integral besitzt, gilt

$$\mathbf{D}(U, w) = 0.$$

Schlagen wir nämlich um O einen in K_0 gelegenen z_0-Kreis K_0^{**}: $|z_0| \leq c_0$.

so klein, daß überall in K_0^{**} die Funktion $w = 0$ ist, dann folgt zunächst aus der für jedes konstante λ gültigen Ungleichung

$$\mathbf{D}(u) \leqq \mathbf{D}(u + \lambda w)$$

die Beziehung $\mathbf{D}(u, w) = 0$. Der Unterschied

$$\mathbf{D}(U, w) - \mathbf{D}(u, w)$$

ist aber

$$\iint\limits_{c_0 \leqq |z_0| \leqq a_0} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_0} \frac{\partial w}{\partial x_0} + \frac{\partial \Phi}{\partial y_0} \frac{\partial w}{\partial y_0}\right) dx_0\, dy_0$$

$$= \int^{2\pi} \left[r_0 w \frac{\partial \Phi}{\partial r_0} \right]_{r_0 = c_0}^{r_0 = a_0} d\varphi_0.$$

Auf K_0 ist $\frac{\partial \Phi}{\partial r_0} = 0$, auf K_0^{**}: $w = 0$; folglich

$$\mathbf{D}(U, w) = \mathbf{D}(u, w) = 0.$$

Die weiterhin noch in diesem Paragraphen zu besprechenden Erweiterungen der Methode des Dirichletschen Prinzipes nehmen wir nur für *geschlossene* Flächen vor.

Statt $\frac{\cos \varphi_0}{r_0}$ kann ich als Singularität in O auch

$$\frac{\sin \varphi_0}{r_0} = \frac{y_0}{x_0^2 + y_0^2}$$

oder allgemeiner

$$\frac{\cos n \varphi_0}{r_0^{\,n}}, \quad \frac{\sin n \varphi_0}{r_0^{\,n}}$$

(Pol n^{ter} Ordnung; n ganz und positiv) vorschreiben. Für Φ habe ich dann den Ansatz

$$\Phi = \frac{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} n \varphi_0}{r_0^{\,n}} + r_0^{\,n} \cdot \frac{\begin{smallmatrix}\cos\\ \sin\end{smallmatrix} n \varphi_0}{a_0^{\,2n}}$$

zu machen; in allen Fällen ist $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_0}\right)_{r_0 = a_0} = 0$. Jede der so gewonnenen Potentialfunktionen gibt zu einem Differential $d\tau$ Veranlassung (vgl. S. 55). Dasselbe ist außer in O überall regulär und wird in O unendlich wie

$$-\frac{n\, dz_0}{z_0^{\,n+1}}, \quad \text{bzw.} \; -i \frac{n\, dz_0}{z_0^{\,n+1}},$$

während der Realteil[1]) des über irgend eine geschlossene Kurve erstreckten Integrales $\int d\tau$ stets 0 ist. Die gefundenen Differentiale sind von der **2. Gattung,** d. h. sie haben nirgends ein von 0 verschiedenes Residuum. Als **Differentiale 3. Gattung** werden solche bezeichnet, die von 0 ver-

---

1) Für den Real- und Imaginärteil einer komplexen Größe $c = a + ib$ werden wir die Zeichen $a = \Re c$, $b = \Im c$ verwenden.

schiedene Residuen besitzen; ein Differential heißt aber von der **1. Gattung**, wenn es nirgendwo einen Pol, geschweige denn ein von 0 verschiedenes Residuum, besitzt.

Es seien 1 und 2 zwei Punkte innerhalb K_0, 1′, 2′ ihre in der z_0-Ebene durch die Methode der reziproken Radien konstruierten Spiegelbilder[1]) in bezug auf $\varkappa_0$. $r_1, r_2; r_1', r_2'$ seien die Längen der Radienvektoren von den Punkten 1, 2; 1′, 2′ nach einem variablen Punkt der z_0-Ebene, $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_1', \varphi_2'$ die zugehörigen (nur bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmten) Azimuts (Winkel mit der Richtung der positiven x_0-Achse). Wenn wir eine Potentialfunktion finden wollen, die außer in 1 und 2 regulär ist, in 1 aber unendlich wird wie $\lg r_1$, in 2 wie $-\lg r_2$, so nehmen wir

$$\Phi = (\lg r_1 - \lg r_2) + (\lg r_1' - \lg r_2')\cdot$$

Die normale Ableitung von Φ auf $\varkappa_0$ ist 0. Der Verschlußring ist so schmal zu nehmen, daß die Punkte 1′, 2′ nicht in den Deckel zu liegen kommen. Das entstehende Potential U gibt zu einem Differential $d\omega_{12}$ Veranlassung, das in 1 und 2 je einen Pol 1. Ordnung mit dem Residuum $+1$, bzw. -1 besitzt. Sind $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ irgend zwei Punkte auf $\mathfrak{F}$, so kann man längs einer $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{q}$ verbindenden Kurve solche Punkte $\mathfrak{p} = 1, 2, 3, \ldots;$ $\mathfrak{q} = n$ zwischenschalten, daß nach unserer Methode

$$d\omega_{12},\ d\omega_{23},\ldots\quad d\omega_{n-1,n}$$

gebildet werden können.

$$d\omega_{\mathfrak{p}\mathfrak{q}} = d\omega_{12} + d\omega_{23} + \ldots + d\omega_{n-1,n}$$

ist dann ein Differential, das nur bei $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ je einen Pol 1. Ordnung von den Residuen $+1$ bzw. -1 besitzt. Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$; $\mathfrak{p}_0$ irgend $n+1$ verschiedene Punkte auf der Fläche und $A_1, A_2, \ldots, A_n$ beliebige komplexe Zahlen mit der Summe 0, so ist

$$\sum_{i=1}^{n} A_i\, d\omega_{\mathfrak{p}_i \mathfrak{p}_0}$$

ein Differential, das an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \ldots, \mathfrak{p}_n$ je einen Pol 1. Ordnung mit den Residuen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ besitzt, während es sich an allen übrigen Stellen (auch in $\mathfrak{p}_0$) regulär verhält. Man sieht, daß man die Residuen eines bis auf Pole regulären Differentials unter der Bedingung, daß ihre Summe gleich 0 sein muß, beliebig vorschreiben kann.

Kehren wir zu dem Kreis K_0 mit den beiden in ihm exzentrisch gelegenen Punkten 1, 2 zurück.

$$\Phi = (\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_1' - \varphi_2')$$

1) Wir können K_0 so annehmen, daß weder 1 noch 2 im Mittelpunkt dieses Kreises liegt.

ist im Verschlußringe (und noch etwas über seine Grenzen hinaus) eine eindeutige reguläre Potentialfunktion. Nach dem Dirichletschen Prinzip existiert daher eine reguläre Potentialfunktion u in der gelochten Fläche und eine reguläre Potentialfunktion u^* im Deckel, die im Verschlußringe in der Beziehung $u = u^* + \Phi$ zueinander stehen. Das zugehörige U ist nicht eindeutig, sondern bekommt in 1 und 2 Windungspunkte unendlich hoher Ordnung. Schneiden wir aber die Fläche in irgend einer stetigen, innerhalb K_0 von 1 nach 2 führenden Kurve σ_0 auf, so ist U in der zerschnittenen Fläche eindeutig. Dies ergibt sich ohne weiteres aus dem Umstande, daß inbezug auf eine geschlossene, in dem Deckel liegende Kurve γ, welche σ_0 nicht schneidet, in der z_0-Ebene die Punkte 1 und 2 dieselbe „Orduung" haben (vgl. S. 56). U gibt trotz seiner Mehrdeutigkeit zu einem in der unzerschnittenen Fläche eindeutigen Differential $d\omega'_{12}$ Veranlassung, das nur bei 1 und 2 Pole 1. Ordnung mit den Residuen $\mp i$ besitzt. Ist die Linie σ_0 eine Elementarstrecke auf der triangulierten Fläche $\mathfrak{F}$, so wird $\Re \int\limits_\gamma d\omega'_{12} = 0$ sein für jede geschlossene Kurve γ, welche diese Strecke nicht trifft, für ein Polygon β aber, das σ_0 an einer einzigen Stelle von rechts nach links überkreuzt, wird

$$\Re \int_\beta d\omega'_{12} = 2\pi.$$

Ist α eine geschlossene Kurve auf $\mathfrak{F}$, so können wir so dicht Punkte $1, 2, 3, \ldots, n$ auf α verteilen, daß jede einzelne der Teilkurven $12, 23, \ldots, n1$, in die α dadurch zerlegt wird, ganz innerhalb eines Kreises wie K_0 zu liegen kommt. Indem wir dann

$$dw_\alpha = \frac{1}{2\pi}\left(d\omega'_{12} + d\omega'_{23} + \cdots + d\omega'_{n1}\right)$$

bilden, erhalten wir ein *überall ohne Ausnahme* reguläres Differential dw_α; es hat die Eigenschaft, daß für jede geschlossene Kurve γ, die α nicht trifft, der Realteil von $\int\limits_\gamma dw_\alpha = 0$ ist. War aber α ein Polygon und ist β ein solches Polygon, das α an einer einzigen Stelle von rechts nach links überkreuzt, so wird

$$\Re \int_\beta dw_\alpha = 1.$$

Die kanonische Zerschneidung dient dazu, nachzuweisen, daß durch lineare Zusammensetzung aus den Differentialen dw_α jedes beliebige Differential 1. Gattung erzeugt werden kann. Sind nämlich

$$\alpha_1 + \alpha_2,\ \alpha_3 + \alpha_4, \ldots,\ \alpha_{2p-1} + \alpha_{2p}$$

die Rückkehrschnittpaare einer kanonischen Zerschneidung und schreiben wir zur Abkürzung $dw_{\alpha_h} = dw_h$, so gilt

$$\Re\int\limits_{\alpha_{2l}} dw_{2l-1} = 1, \quad \Re\int\limits_{\alpha_{2l-1}} dw_{2l} = -1 \quad [l = 1, \ldots, p],$$

und alle andern Ausdrücke von der Form $\Re\int\limits_{\alpha_h} dw_i$ sind $= 0$. Ist nun der Realteil von $\int\limits_{\alpha_h} dw$ gleich c_h, so wird

$$(29) \qquad \Re\int\Big[dw - (c_2\,dw_1 - c_1\,dw_2) - (c_4\,dw_3 - c_3\,dw_4) - \ldots\Big]$$

bei Integration über eine jede geschlossene Kurve $= 0$, da diese „Integralfunktion" für die $2p$ Kurven α_h verschwindet, die eine Basis der geschlossenen Wege bilden. Infolgedessen ist (29), von einem festen Anfangspunkt nach einem variablen Endpunkt integriert, eine eindeutige und zwar regulär-harmonische Funktion dieses Endpunktes; da aber eine solche außer der Konstanten nicht existiert, ergibt sich die Identität:

$$dw = (c_2\,dw_1 - c_1\,dw_2) + (c_4\,dw_3 - c_3\,dw_4) + \ldots,$$

d. h. *aus den $2p$ Differentialen dw_h läßt sich jedes Differential 1. Gattung auf eine und nur eine Weise mit Hilfe konstanter reeller Faktoren zusammensetzen:* die dw_h bilden eine „reelle" Basis der Differentiale 1. Gattung. — Der Übergang von *einer* reellen Basis der Differentiale 1. Gattung zu einer anderen wird vermittelt durch lineare Transformation mit beliebigen reellen Koeffizienten und einer von 0 verschiedenen Determinante. Aus den $2p$ Differentialen dw_h einer reellen Basis kann man sich solche (etwa $dw_1, \ldots, dw_q$) auswählen, daß zwischen diesen keine lineare Beziehung mit beliebigen konstanten *komplexen* Koeffizienten besteht, wohl aber zwischen je $q+1$ Differentialen der Basis. Da dann

$$(30) \qquad dw_1, \ldots, dw_q;\ i\,dw_1, \ldots, i\,dw_q$$

in reellen Sinne linear unabhängig sind, muß $2q \leqq 2p$ sein. Da aber jedes Differential der Basis und damit jedes Differential 1. Gattung überhaupt sich linear mit komplexen Koeffizienten aus $dw_1, \ldots, dw_q$, also linear mit reellen Koeffizienten aus den Differentialen (30) zusammensetzen läßt, muß $2q \geqq 2p$, folglich $q = p$ sein. Aus den Differentialen einer reellen Basis kann man demnach eine aus p Differentialen bestehende „komplexe" Basis $dw_1, \ldots, dw_p$ herauslösen. Jedes Differential 1. Gattung dw gestattet eine und nur eine Darstellung der Form

$$dw = C_1\,dw_1 + \ldots + C_p\,dw_p$$

mit komplexen Konstanten $C_1, \ldots, C_p$.

Lautet die Potenzentwicklung eines beliebigen Differentials dv an einer Stelle $\mathfrak{p}_1$, zu dem die Ortsuniformisierende z_1 gehört,

$$dv = \left(\frac{A_{-m}}{z_1^m} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z_1} + A_0 + A_1 z_1 + \ldots\right) dz_1$$

so nennen wir

$$\left(\frac{A_{-m}}{z_1^{\,m}} + \ldots + \frac{A_{-1}}{z_1}\right) dz_1$$

den **Hauptteil** von dv an der Stelle $\mathfrak{p}_1$. Gibt man auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche von einem Differential dv die Pole und die Hauptteile an diesen beliebig vor, doch so, daß die Summe der Residuen $= 0$ ist, und außerdem den Realteil von $\int\limits_{\gamma} dv$ für $2p$ linear unabhängige geschlossene Wege γ, so gibt es ein und nur ein Differential dv, das den gestellten Anforderungen genügt; es kann durch additive Zusammensetzung aus den oben von uns mit Hilfe des Dirichletschen Prinzipes konstruierten **Elementardifferentialen** gewonnen werden.

§ 15. Beweis des Dirichletschen Prinzips.[1]

Die Konkurrenzbedingungen für die Funktion v seien wie im vorigen Paragraphen festgelegt, aus dem wir auch alle anderen Bezeichnungen herübernehmen. Es ist zunächst zu bemerken, daß es überhaupt Konkurrenzfunktionen gibt (auch im Falle nicht-geschlossener Flächen), z. B. solche, die außer in den Punkten von K_0 überall $= 0$ sind. d sei die untere Grenze des Dirichletschen Integrals $\mathbf{D}(v)$ für alle Konkurrenz funktionen; dann wird stets $\mathbf{D}(v) \geqq d$ sein, aber, wenn ε eine beliebig kleine positive Größe ist, werden immer noch Konkurrenzfunktionen v existieren, für welche $\mathbf{D}(v) < d + \varepsilon$ ausfällt. Ist v eine Konkurrenzfunktion, so ist auch immer $v + a$, wo a eine willkürliche reelle Konstante ist, eine solche, die übrigens dem Dirichletschen Integral denselben Wert wie v erteilt. Wir können infolgedessen die Konkurrenzbedingungen noch durch die Forderung einschränken, daß das Randintegral von v^* um den Kreis K_0

$$\int\limits_0^{2\pi} v^*_{r_0 = a_0} \cdot d\varphi_0 = 0$$

sein soll. Ist jeder Konkurrenzfunktion v irgendwie eine Zahl $\vartheta(v)$ zugeordnet, so wird eine Limesgleichung wie

$$\lim \vartheta(v) = \vartheta_0$$

1) Bei der Durchführung des Beweises ist hauptsächlich die S. 94 zitierte Arbeit von Zaremba zugrunde gelegt worden. Diese bezieht sich jedoch nur auf *ebene* Bereiche (und zwar auf die Lösung der ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie für solche Bereiche). Wie das Dirichletsche Prinzip für beliebige Riemannsche Flächen zu begründen ist, zeigt R. König, Konforme Abbildung der Oberfläche einer räumlichen Ecke, Leipziger Habilitationsschrift 1911, abgedruckt in Math. Ann. Bd. 71, S. 184—205. Unser, von dem Riemann-Hilbertschen abweichender Ansatz bringt weitgehende Vereinfachungen mit sich.

bedeuten, daß zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ derart angegeben werden kann, daß für alle Konkurrenzfunktionen v, für welche $\mathbf{D}(v) < d + \delta$ ist, der Unterschied $|\vartheta(v) - \vartheta_0| < \varepsilon$ wird. Die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß ein $\lim \vartheta(v)$ in diesem Sinne existiert, ist die, daß zu jedem positiven ε ein positives δ gefunden werden kann derart, daß für irgend zwei Konkurrenzfunktionen v_1, v_2, welche dem Dirichletschen Integral Werte $< d + \delta$ erteilen,

$$|\vartheta(v_1) - \vartheta(v_2)| < \varepsilon$$

wird.

Der Satz, den wir zu beweisen haben, lautet: *Es gibt eine Konkurrenzfunktion u mit der Eigenschaft $\mathbf{D}(u) = d$.*

Wir beginnen diesen Nachweis mit der *B. Levischen Ungleichung*[1]), welche aussagt, daß zwei Konkurrenzfunktionen v_1, v_2, deren Dirichletsches Integral der unteren Grenze d nahekommt, eine Differenz $v_1 - v_2$ besitzen, deren Dirichlet-Integral sehr klein ist:

$$\sqrt{\mathbf{D}(v_1 - v_2)} \leqq \sqrt{\mathbf{D}(v_1) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(v_2) - d}.$$

Sind nämlich λ_1, λ_2 irgend zwei Konstante, $\lambda_1 + \lambda_2 \neq 0$, so ist mit v_1, v_2 auch

$$\frac{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

eine Konkurrenzfunktion, und daher

$$\mathbf{D}(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) \geqq d \cdot (\lambda_1 + \lambda_2)^2.$$

Diese Ungleichung verliert ihre Gültigkeit für $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$ nicht. Die quadratische Form von λ_1, λ_2:

$$\lambda_1^2[\mathbf{D}(v_1) - d] + 2\lambda_1\lambda_2[\mathbf{D}(v_1 v_2) - d] + \lambda_2^2[\mathbf{D}(v_2) - d]$$

ist also stets $\geqq 0$, und darum muß

$$[\mathbf{D}(v_1) - d][\mathbf{D}(v_2) - d] \geqq [\mathbf{D}(v_1 v_2) - d]^2$$

sein. Es ist aber

$$\begin{aligned} 0 \leqq \mathbf{D}(v_1 - v_2) &= \mathbf{D}(v_1) - 2\mathbf{D}(v_1 v_2) + \mathbf{D}(v_2) \\ &= [\mathbf{D}(v_1) - d] + [\mathbf{D}(v_2) - d] - 2[\mathbf{D}(v_1 v_2) - d] \\ &\leqq [\mathbf{D}(v_1) - d] + [\mathbf{D}(v_2) - d] + 2\sqrt{[\mathbf{D}(v_1) - d][\mathbf{D}(v_2) - d]} \\ &= \left\{\sqrt{\mathbf{D}(v_1) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(v_2) - d}\right\}^2. \end{aligned}$$

Aus der Levischen Ungleichung kann man bereits etwas ähnliches schließen wie, daß v selber, wenn man es so variiert, daß $\mathbf{D}(v)$ seiner unteren Grenze d entgegengetrieben wird, gegen eine Grenzfunktion konvergiert, die dann die gesuchte Minimalfunktion sein wird. Ist näm-

1) B. Levi, Sul principio di Dirichlet, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Bd. 22 (1906), S. 293—360, § 7.

lich $\mathfrak{p}$ irgendein Punkt auf der Fläche, $z = x + iy$ eine Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}$, $\mathsf{K} : |z| \leqq a$ ein z-Kreis und $\mathfrak{E}$ eine beliebige abgeschlossene Menge in K, die in der z-Ebene einen bestimmten Inhalt besitzt, so liefert die Schwarzsche Ungleichung, angewandt auf $\frac{\partial(v_1 - v_2)}{\partial x}$ und 1:

$$\left|\iint_{\mathfrak{E}} \left\{\frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial v_2}{\partial x}\right\} dx\,dy\right| \leqq a\sqrt{\pi}\cdot\sqrt{\mathbf{D}(v_1 - v_2)}.$$

Es existieren also gleichmäßig für alle in K gelegenen Bereiche $\mathfrak{E}$ die Grenzwerte

$$\lim_v \iint_{\mathfrak{E}} \frac{\partial v}{\partial x}\, dx\,dy, \qquad \lim_v \iint_{\mathfrak{E}} \frac{\partial v}{\partial y}\, dx\,dy.$$

D. h.: ich kann zwar nicht von den Differentialquotienten $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ selber schließen, daß sie konvergieren, wohl aber gilt dies von den *flächenhaft integrierten* Differentialquotienten. Es ist bequemer, statt der Differentialquotienten auf die Funktion v selbst zurückzukommen; wir werden dann sehen, daß in demselben Sinne

$$\lim_v \iint_{\mathfrak{E}} v\, dx\,dy$$

existiert. Wenn die Minimalfunktion u vorhanden ist, muß dieser Limes außerdem $= \iint_{\mathfrak{E}} u\, dx\,dy$ sein. Nehmen wir für $\mathfrak{E}$ den Kreis K selbst und beachten, daß u eine Potentialfunktion sein wird, daß also (jedenfalls, wenn K ganz in der gelochten Fläche liegt)

$$\begin{aligned}\frac{\iint_{\mathsf{K}} u\, dx\,dy}{\pi a^2} &= \text{Mittelwert von } u \text{ in } \mathsf{K}\\ &= u(\mathfrak{p})\end{aligned}$$

ist, so wird man darauf geführt, den gewünschten Existenzbeweis so zu erbringen, daß man den Wert

$$\lim_v \frac{1}{\pi a^2} \iint_{\mathsf{K}} v\, dx\,dy$$

dem Mittelpunkt des Kreises als Funktionswert u zuordnet und dann zeigt, daß die dadurch erhaltene Funktion wirklich die Minimalfunktion ist: Weil die Grenzfunktion u eine Potentialfunktion sein wird, ist die vorgenommene konvergenzerzeugende Integration über Kreise im Limes einflußlos.

Zur Ausführung dieses Gedankenganges schreitend, müssen wir zunächst das Dirichlet-Integral von $v_1 - v_2$ durch das Quadratintegral von $v_1 - v_2$ ersetzen. Zu dem Zweck zeigen wir: Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt, z eine zu-

gehörige Ortsuniformisierende, $\mathsf{K}: |z| \leqq a$ ein z-Kreis, so gibt es eine Zahl C von der Art, daß für jede stetig differentiierbare Funktion w auf der Fläche, deren Randintegral $\int^{2\pi} w\,d\varphi_0$ um K_0 den Wert 0 hat,

$$\iint_{\mathsf{K}} w^2 dx\,dy \leqq C \cdot \mathbf{D}(w)$$

ist.

Wir bilden eine Kette von Punkten $\mathfrak{p}_0 = O, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n = \mathfrak{p}$ mit zugehörigen Ortsuniformisierenden $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n = z$ und schlagen um jeden Punkt $\mathfrak{p}_i$ einen z_i-Kreis $\mathsf{K}_i : |z_i| \leqq a_i$ (um $\mathfrak{p}_0$ den Kreis K_0, um $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_n$ den Kreis $\mathsf{K} = \mathsf{K}_n$); es ist dafür Sorge getragen, daß immer K_{i+1} über K_i greift (d. h. K_i und K_{i+1} innere Punkte gemein haben). Dann wird zunächst nach § 13

$$\iint_{\mathsf{K}_0} w^2 dx_0\,dy_0 \leqq \frac{a_0^2}{2} \iint_{\mathsf{K}_0} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x_0}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y_0}\right)^2\right] dx_0\,dy_0 \leqq \frac{a_0^2}{2}\,\mathbf{D}(w).$$

Für K_0 trifft also unsere Behauptung zu; wir werden daraus schließen, daß sie für K_1 gleichfalls gültig ist. Nach dem eben benutzten Satz gibt es jedenfalls eine Konstante c, sodaß

$$\iint_{\mathsf{K}_1} (w - c)^2 dx_1\,dy_1 \leqq \frac{a_1^2}{2}\,\mathbf{D}(w)$$

ist. Bezeichnet $\mathfrak{E}_{01}$ die aus den sowohl in K_0 als K_1 gelegenen Punkten gebildete Punktmenge, so hängen in $\mathfrak{E}_{01}$ die Variablen $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_0 = x_0 + iy_0$ durch eine Transformation zusammen, die auch über die Grenze von $\mathfrak{E}_{01}$ hinaus noch regulär analytisch ist. Die Funktionaldeterminante

$$\frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_0, y_0)} = \left|\frac{dz_1}{dz_0}\right|^2$$

hat daher in $\mathfrak{E}_{01}$ eine obere Grenze M_{01}, und es ist:

$$\iint_{\mathfrak{E}_{01}} w^2 dx_1\,dy_1 = \iint_{\mathfrak{E}_{01}} w^2 \frac{\partial(x_1, y_1)}{\partial(x_0, y_0)}\,dx_0\,dy_0$$

$$(31)\qquad \leqq M_{01} \iint_{\mathfrak{E}_{01}} w^2 dx_0\,dy_0 \leqq M_{01} \iint_{\mathsf{K}_0} w^2 dx_0\,dy_0 \leqq M_{01} \frac{a_0^2}{2}\,\mathbf{D}(w),$$

anderseits

$$(32)\qquad \iint_{\mathfrak{E}_{01}} (w - c)^2 dx_1\,dy_1 \leqq \frac{a_1^2}{2}\,\mathbf{D}(w).$$

Bedeutet J_{01} den Inhalt der Bildmenge von $\mathfrak{E}_{01}$ in der z_1-Ebene:

$$J_{01} = \iint_{\mathfrak{E}_{01}} dx_1 dy_1 > 0,$$

so liefert die Addition von (31), (32) wegen

$$c^2 \leqq 2[w^2 + (c-w)^2]:$$

$$c^2 \cdot J_{01} \leqq (a_0^2 M_{01} + a_1^2) \mathbf{D}(w)$$

und dann

$$\iint_{K_1} w^2 dx_1 dy_1 \leqq 2\left[\iint_{K_1} (w-c)^2 dx_1 dy_1 + c^2 a_1^2 \pi\right]$$

$$\leqq a_1^2 \left(1 + \frac{2\pi(a_1^2 + a_0^2 M_{01})}{J_{01}}\right) \cdot \mathbf{D}(w).$$

Damit ist der Beweis für K_1 erbracht. Von K_1 schließen wir jetzt auf K_2 usf. und kommen schließlich bei $K_n = K$ an. Wenden wir das Ergebnis auf die Differenz zweier Konkurrenzfunktionen v_1, v_2 an, so haben wir

$$(33) \qquad \iint_K (v_1 - v_2)^2 dx dy \leqq C \{\sqrt{\mathbf{D}(v_1) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(v_2) - d}\}^2.$$

Den Mittelwert

$$\frac{1}{\pi a^2} \iint_K f dx dy$$

einer in K stetigen Funktion bezeichne ich allgemein mit $\underset{K,z}{\mathbf{M}} f$. Die Punkte auf der gelochten Fläche und die Punkte im Deckel betrachte ich gesondert. Liegt $\mathfrak{p}$ auf der gelochten Fläche, so werde K so genommen, daß auch K ganz in der gelochten Fläche liegt. Es existiert dann gemäß der letzten Ungleichung

$$\lim_v \underset{K,z}{\mathbf{M}} v = u.$$

Ist $\mathfrak{p}$ ein Punkt im Deckel, $z_0(\mathfrak{p}) = c_0$, so möge $z_0 - c_0$ als Ortsuniformisierende z angenommen werden, und der z-Kreis K liege ganz im Deckel. Es existiert

$$\lim_v \underset{K,z}{\mathbf{M}} v^* = u^*.$$

Wir behaupten: *u, u^* hängen nur von $\mathfrak{p}$ ab, nicht aber von der Wahl der Ortsuniformisierenden z und von dem z-Kreise* K.

Ich führe den Beweis für die Punkte $\mathfrak{p}$ in der gelochten Fläche durch. Sei also $z' = x' + iy'$ eine andere Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}$, $K' : |z'| \leqq a'$ ein z'-Kreis. Ich nehme zunächst an, daß K' ganz in K gelegen ist. $\bar{v}$ sei diejenige Potentialfunktion in K, die am Rande mit v übereinstimmt. Es ist $\mathbf{D}_K(\bar{v}) \leqq \mathbf{D}_K(v)$, und es gibt eine Konkurrenzfunktion $\tilde{v}$, die außer in K mit v übereinstimmt und für welche

$$\mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v} - \bar{v}) = \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v}) - \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v})$$

so klein ist, wie man will. Es gilt

$$\mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v} - v) = \mathbf{D}(\bar{v} - v) \leqq (\sqrt{\mathbf{D}(v) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(\bar{v}) - d})^2;$$

infolgedessen muß

$$\mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v} - v) = \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(v) - \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v}) \leqq 4[\mathbf{D}(v) - d]$$

sein. Da $\bar{v} - v$ am Rande des Kreises K verschwindet, folgt daraus

$$\iint\limits_{\mathsf{K}} (\bar{v} - v)^2 dx\,dy \leqq a^2[\mathbf{D}(v) - d]$$

und mittels der Schwarzschen Ungleichung

$$\left|\underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, v - \underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, \bar{v}\right| \leqq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathbf{D}(v) - d}.$$

Da $\bar{v}$ Potentialfunktion ist, ist $\underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, \bar{v} = \bar{v}(\mathfrak{p})$, also haben wir:

$$\lim_{v} \underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \bar{v}(\mathfrak{p}), \qquad \lim_{v} \bar{v}(\mathfrak{p}) = u.$$

In K′ hängen z und z' durch eine auch über die Grenzen von K′ hinaus analytische Transformation zusammen; ist M eine obere Grenze für $\left|\frac{dz'}{dz}\right|^2$ in K′, gilt

$$\iint\limits_{\mathsf{K}'} (\bar{v} - v)^2 dx'\,dy' \leqq a^2 M[\mathbf{D}(v) - d]:$$

$$\lim_{v} \underset{\mathsf{K}',z'}{\mathbf{M}}\, \bar{v} = \lim_{v} \underset{\mathsf{K}',z'}{\mathbf{M}}\, v.$$

Da aber $\bar{v}$ auch in den Variablen x', y' Potentialfunktion ist, muß $\underset{\mathsf{K}',z'}{\mathbf{M}}\, \bar{v} = \bar{v}(\mathfrak{p})$ sein; daher

$$\lim_{v} \underset{\mathsf{K}',z'}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \bar{v}(\mathfrak{p}) = \lim_{v} \underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, v.$$

Wenn K′ nicht in K liegt, benutzen wir als Zwischenglied einen z'-Kreis K'_*, der sowohl in K′ als in K liegt. Dann liefert unsere Schlußweise:

$$1)\ \lim_{v} \underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \underset{\mathsf{K}'_*,z'}{\mathbf{M}}\, v; \qquad 2)\ \lim_{v} \underset{\mathsf{K}',z'}{\mathbf{M}}\, v = \lim_{v} \underset{\mathsf{K}'_*,z'}{\mathbf{M}}\, v,$$

woraus sich auch

$$\lim \underset{\mathsf{K},z}{\mathbf{M}}\, v = \lim \underset{\mathsf{K}',z'}{\mathbf{M}}\, v$$

in diesem Falle ergibt. Wenn man die analogen Schlüsse für die Punkte des Deckels durchführen will, hat man in dem Fall, daß K über den Lochrand hinübergreift, die aus den Ausführungen auf S. 95 sich ergebende Beziehung

$$\mathbf{D}_{\mathsf{K}}(v) - \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v}) = \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(v^*) - \mathbf{D}_{\mathsf{K}}(\bar{v}^*)$$

zu beachten, durch welche die Gleichung $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_0}\right)_{r_0 = a_0} = 0$ ausgenutzt wird.

Die Zahl u, bzw. u^* ordnen wir als Funktionswert dem Punkte $\mathfrak{p}$ zu; wir haben dann eine in der gelochten Fläche definierte Funktion $u(\mathfrak{p})$ und eine Funktion $u^*(\mathfrak{p})$ im Deckel. Zur Untersuchung der Funktion $u(\mathfrak{p})$ in der gelochten Fläche betrachte ich alle Punkte $\mathfrak{q}$, welche in dem z-Kreis K um $\mathfrak{p}$ liegen, und führe die folgenden Überlegungen an dem Bilde von K in der z-Ebene (in welchem $\mathfrak{p}$ der Nullpunkt ist) aus. Um $\mathfrak{q}$ schlage ich (in der z-Ebene) den Kreis $\mathsf{K}_{\mathfrak{q}}$, der K von innen berührt; sein Radius ist $q = a - |z(\mathfrak{q})|$. Es gilt, wenn v_1 neben v eine zweite Konkurrenzfunktion ist und $\bar{v}$ die alte Bedeutung hat, nach Formel (33), in der wir v_2 durch $\bar{v}$ ersetzen,

$$\iint_{\mathsf{K}_{\mathfrak{q}}} (\bar{v} - v_1)^2 dx\, dy \leqq C\left(\sqrt{\mathbf{D}(v) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(v_1) - d}\right)^2,$$

also

$$\left|\bar{v}(\mathfrak{q}) - \underset{\mathsf{K}_{\mathfrak{q}}}{\mathbf{M}} v_1\right| \leqq \frac{\sqrt{C}}{q\sqrt{\pi}}\left(\sqrt{\mathbf{D}(v) - d} + \sqrt{\mathbf{D}(v_1) - d}\right).$$

Hierin führe ich mit v_1 den Grenzübergang $\lim \mathbf{D}(v_1) = d$ aus:

$$|u(\mathfrak{q}) - \bar{v}(\mathfrak{q})| \leqq \frac{\sqrt{C}}{q\sqrt{\pi}} \sqrt{\mathbf{D}(v) - d}.$$

$\bar{v}(\mathfrak{q})$ konvergiert mithin *gleichmäßig* gegen $u(\mathfrak{q})$ in einem beliebigen konzentrischen Kreise, der ganz innerhalb K liegt. u ist demnach in $\mathfrak{p}$ eine Potentialfunktion (S. 83), und auch die ersten Abteilungen von $\bar{v}$ konvergieren in demselben Sinne gleichmäßig gegen die betreffenden Ableitungen von u.

Ebenso ist u^* im Deckel eine reguläre Potentialfunktion. Bedeutet $\mathfrak{p}$ einen Punkt innerhalb des Verschlußringes und schlagen wir in der z_0-Ebene um $\mathfrak{p}$ einen Kreis K, der ganz *im Verschlußring* liegt, so haben wir

$$u(\mathfrak{p}) = \lim_{v} \underset{\mathsf{K}}{\mathbf{M}} v;$$

$$u^*(\mathfrak{p}) = \lim_{v} \underset{\mathsf{K}}{\mathbf{M}} v^* = \lim_{v} \underset{\mathsf{K}}{\mathbf{M}} v - \underset{\mathsf{K}}{\mathbf{M}} \Phi.$$

Da Φ im Verschlußring eine reguläre Potentialfunktion ist, besteht die Gleichung $\underset{\mathsf{K}}{\mathbf{M}} \Phi = \Phi(\mathfrak{p})$; so schließen wir

$$u(\mathfrak{p}) = u^*(\mathfrak{p}) + \Phi(\mathfrak{p}).$$

Es ist uns also die Konstruktion einer in der gelochten Fläche regulär-harmonischen Funktion u und einer im Deckel regulär-harmonischen Funktion u^* gelungen, welche im Verschlußring zueinander in der Beziehung $u = u^* + \Phi$ stehen. Wir haben noch nachzuweisen, daß diejenige Funk-

tion u, welche in der gelochten Fläche $= u(\mathfrak{p})$, im Loch $= u^*(\mathfrak{p})$ ist, die Minimalgleichung $\mathbf{D}(u) = d$ befriedigt — obwohl für die Anwendungen auf die Theorie der *geschlossenen* Riemannschen Flächen die bisher festgestellten Eigenschaften von u, u^* offenbar genügen würden. Für die Uniformisierungstheorie, von der die letzten Abschnitte dieser Schrift handeln sollen, ist aber die Minimaleigenschaft wesentlich.

Die zur Berechnung des Dirichletschen Integrals nötige Zerschneidung der Fläche durch die Peripherien $\varkappa_l$ von Kreisen K_l kann so eingerichtet werden, daß jeder Kreis K_l entweder ganz in der gelochten Fläche liegt oder ganz dem Deckel angehört (und dann in der z_0-Ebene als Kreis erscheint). Es sei $\mathfrak{E}_h$ eines der Stücke, in die die Fläche dabei zerschnitten wird und welches zu einem Kreis K_l der ersten Art gehört. Wir benutzen die Uniformisierende $z_l = z = x + iy$, mit bezug auf welche K_l ein Kreis ist, zur Uniformisierung von $\mathfrak{E}_h$. K_l' sei ein z_l-Kreis, der etwas größer ist als K_l, aber auch noch ganz in der gelochten Fläche liegt, $\bar{v}$ zu jeder Konkurrenzfunktion v diejenige Potentialfunktion in K_l', die am Rande von K_l' mit v übereinstimmt. Dann konvergieren $\frac{\partial \bar{v}}{\partial x}, \frac{\partial \bar{v}}{\partial y}$ in K_l gleichmäßig gegen $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$; also

$$\lim_v \mathbf{D}_{\mathsf{K}_l}(\bar{v} - u) = 0.$$

Anderseits

$$\mathbf{D}_{\mathsf{K}_l}(v - \bar{v}) \leqq \mathbf{D}_{\mathsf{K}_l'}(v - \bar{v}) \leqq 4[\mathbf{D}(v) - d],$$

daher

$$\lim_v \mathbf{D}_{\mathsf{K}_l}(v - u) = 0,$$

$$\lim_v \mathbf{D}_{\mathfrak{E}_h}(v - u) = 0,$$

$$\mathbf{D}_{\mathfrak{E}_h}(u) = \lim_v \mathbf{D}_{\mathfrak{E}_h}(v).$$

Das Gleiche beweist man für ein Stück $\mathfrak{E}_h$, das einem Kreis der zweiten Art angehört [zunächst in der Form

$$\lim_v \mathbf{D}_{\mathfrak{E}_h}(v^* - u^*) = 0].$$

Bildet man $\sum \mathbf{D}_{\mathfrak{E}_h}(u)$ über irgendeine endliche Anzahl von Stücken $\mathfrak{E}_h$, so ist diese Summe

$$\lim \sum \mathbf{D}_{\mathfrak{E}_h}(v) \leqq \lim \mathbf{D}(v) = d.$$

Daher ist $\mathbf{D}(u)$ endlich und $\leqq d$. Da es nicht $< d$ sein kann, muß $\mathbf{D}(u) = d$ sein, q. e. d.

§ 16. Zusammenhänge zwischen den Differentialen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche.

Statt die Elementardifferentiale 2. und 3. Gattung unabhängig voneinander mit Hilfe des Dirichletchen Prinzips wie in § 14 aufzustellen, kann man auch alle bis auf Pole regulären Differentiale, die zu einer gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ gehören, aus dem einfachsten der in § 14 mit $d\tau$ bezeichneten herleiten [1]) und gewinnt auf diesem Wege zugleich einen sehr vollständigen Überblick über die zwischen den einzelnen Differentialen bestehenden Zusammenhänge.

Es sei $\mathfrak{q}$ ein Punkt auf $\mathfrak{F}$, und $\zeta = \xi + i\eta$ eine zu $\mathfrak{q}$ gehörige Ortsuniformisierende. Die Potentialfunktion, welche nur in $\mathfrak{q}$ unendlich wird wie

$$\Re \frac{1}{\zeta} = \frac{\xi}{\xi^2 + \eta^2},$$

bezeichnen wir — als Realteil des erst auf der Überlagerungsfläche $\hat{\mathfrak{F}}$ eindeutigen, in $\mathfrak{q}$ einen Pol 1. Ordnung besitzenden Abelschen Integrals 2. Gattung $\tau_{\mathfrak{q}}$ — mit $\Re\tau_{\mathfrak{q}}$. Die Bedeutung dieses Funktionszeichens hängt danach nicht nur vom Punkte $\mathfrak{q}$, sondern auch von der Wahl der zu $\mathfrak{q}$ gehörigen Ortsuniformisierenden ζ ab; wo dies hervorgehoben werden soll, schreiben wir $\mathfrak{q}\zeta$ statt des Index $\mathfrak{q}$ allein. Benutzen wir $i\zeta$ an Stelle von ζ als Ortsuniformisierende, so bekommen wir diejenige Potentialfunktion

$$\Re\tau'_{\mathfrak{q}} = \Re\tau'_{\mathfrak{q}\zeta} = \Re\tau_{\mathfrak{q},\, i\zeta},$$

die nur im Punkte $\mathfrak{q}$ und zwar wie $\frac{-\eta}{\xi^2 + \eta^2}$ unendlich wird.

Um die Abhängigkeit dieser Funktionen von dem Unendlichkeitspunkte $\mathfrak{q}$ zu untersuchen, verfahren wir so: Wir grenzen um $\mathfrak{q}$ einen ζ-Kreis K: $|\zeta| \leqq \alpha$ ab, bezeichnen mit $\mathfrak{q}^*$ einen in K variablen Punkt und verstehen unter

$$\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}, \quad \Re\tau'_{\mathfrak{q}^*}$$

diejenigen in $\mathfrak{q}^*$ unendlich werdenden Potentialfunktionen, welche der Ortsuniformisierenden $\zeta - \zeta(\mathfrak{q}^*)$ in $\mathfrak{q}^*$ entsprechen. Wir werden sogleich zeigen, daß diese Funktionen — bei zweckmäßiger Normierung der für jede Lage von $\mathfrak{q}^*$ noch zur Verfügung stehenden additiven Konstanten — *stetig* in bezug auf $\mathfrak{q}^*$ sind; für Punkte $\mathfrak{p}$, die in der Umgebung K von $\mathfrak{q}$ liegen, wird

$$(34)\quad \Re\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}) = \Re\frac{1}{\zeta(\mathfrak{p}) - \zeta(\mathfrak{q}^*)} + R_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}),\quad \Re\tau'_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}) = \Re\frac{-i}{\zeta(\mathfrak{p}) - \zeta(\mathfrak{q}^*)} + R'_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})$$

sein, wo R, R', solange $\mathfrak{q}^*$ und $\mathfrak{p}$ in K liegen, stetige Funktionen von $\mathfrak{q}^*$ und durchaus reguläre Potentialfunktionen in $\mathfrak{p}$ sind. $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ seien zwei Punkte innerhalb K, die durch einen rektifizierbaren Integrationsweg γ

1) Vgl. Klein-Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunktionen Bd. I, S. 518ff.

innerhalb K verbunden seien. Durch *longitudinale* Aneinanderreihung von Doppelquellen längs γ, d. h. durch Aneinanderreihung von Doppelquellen konstanten Moments, deren Richtung mit der Richtung von γ zusammenfällt, erhalten wir in

$$(35)\quad \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} \{\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})\,d\xi_{\mathfrak{q}^*} - \Re\tau'_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})\,d\eta_{\mathfrak{q}^*}\} = \Re\,\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p}) \quad [\xi_{\mathfrak{q}^*} + i\eta_{\mathfrak{q}^*} = \zeta(\mathfrak{q}^*)]$$

eine Potentialfunktion, die in $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ je eine Senke, bzw. Quelle, d. h. je eine logarithmische Singularität mit den Residuen $+1$ bzw. -1 besitzt [Entstehung eines Magneten aus Elementarmagneten!], und damit also das Abelsche Integral 3. Gattung $\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$. Denn für Punkte $\mathfrak{p}$, die nicht in K liegen, ist offenbar die linke Seite von (35) eine reguläre Potentialfunktion; liegt aber $\mathfrak{p}$ in K, so ist sie nach (34) bis auf eine additiv hinzutretende reguläre Potentialfunktion $= \lg r_1 - \lg r_2$, wo r_1, r_2 die geradlinigen Entfernungen von $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ nach $\mathfrak{p}$ in der ζ-Ebene bedeuten. — Durch *transversale* Aneinanderreihung der Doppelquellen erhalten wir in

$$(35')\qquad \int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} \{\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})\,d\eta_{\mathfrak{q}^*} + \Re\tau'_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})\,d\xi_{\mathfrak{q}^*}\} = \Re\,\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})$$

eine Potentialfunktion, die in $\mathfrak{q}_1$, $\mathfrak{q}_2$ zwei Wirbelpunkte mit entgegengesetztem Drehsinn hat [Äquivalenz einer magnetischen Doppelschicht mit einem elektrischen Strom!], die nämlich für Punkte $\mathfrak{p}$ innerhalb K bis auf eine additive reguläre Potentialfunktion gleich dem Winkel ist, den die geraden Verbindungslinien $\mathfrak{q}_1\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_2\mathfrak{p}$ in der ζ-Ebene miteinander bilden. Die Funktion $\Re\,\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ ist nur auf der längs des Integrationsweges γ aufgeschnittenen Fläche $\mathfrak{F}$ eindeutig.

Zur vollständigen Begründung dieser Herleitung ist die für die Möglichkeit der in (35), (35') vollzogenen Integrationen wesentliche *Stetigkeit* von $\Re\tau_{\mathfrak{q}^*}$, $\Re\tau'_{\mathfrak{q}^*}$ inbezug auf den „Parameter“ $\mathfrak{q}^*$ noch zu beweisen. Dazu müssen wir auf die Konstruktion dieser Potentialfunktionen zurückgreifen. Wir bilden, indem wir unter $\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)$ den Spiegelpunkt von $\zeta(\mathfrak{q}^*)$ in der ζ-Ebene inbezug auf den Kreis K verstehen,

$$\Phi_{\mathfrak{q}^*}(\zeta) = \Re\left[\frac{1}{\zeta - \zeta(\mathfrak{q}^*)} - \left(\frac{\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)}{\alpha}\right)^2\left(\frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)} + \frac{1}{\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*)}\right)\right]$$

und setzen

$$u_{\mathfrak{q}^*} = \begin{cases} \Re\tau_{\mathfrak{q}^*} \text{ außerhalb K} \\ \Re\tau_{\mathfrak{q}^*} - \Phi_{\mathfrak{q}^*} \text{ innerhalb K.} \end{cases}$$

Da $\Phi_{\mathfrak{q}^*}$ am Rande von K die normale Ableitung 0 hat, erteilt $u_{\mathfrak{q}^*} - u_{\mathfrak{q}}$ unter allen Funktionen v, welche am Rande von K den Sprung $\Phi_{\mathfrak{q}^*} - \Phi_{\mathfrak{q}}$ haben, sonst aber stetig sind, dem über ganz $\mathfrak{F}$ erstreckten Dirichletschen Integral $\mathbf{D}(v)$ seinen kleinsten Wert. Als Vergleichsfunktion kann

insbesondere diejenige Funktion v dienen, welche außerhalb K gleich 0, innerhalb K aber als die in ihren Randwerten mit $\Phi_{\mathfrak{q}} - \Phi_{\mathfrak{q}^*}$ übereinstimmende reguläre Potentialfunktion erklärt ist:

$$\frac{2}{\alpha^2} \Re \left[\frac{\bar{\zeta}^2(\mathfrak{q}^*)}{\bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*) - \zeta} - \zeta - \bar{\zeta}(\mathfrak{q}^*) \right]:$$

$$(36) \qquad \mathbf{D}(u_{\mathfrak{q}^*} - u_{\mathfrak{q}}) \leqq \mathbf{D}(v) = \frac{4\pi}{\alpha^2} \frac{q^2(2-q^2)}{(1-q^2)^2} \quad \left(q = \frac{|\zeta(\mathfrak{q}^*)|}{\alpha}\right).$$

Das Dirichletsche Integral von $u_{\mathfrak{q}^*} - u_{\mathfrak{q}}$ konvergiert also gegen 0, wenn $\mathfrak{q}^*$ gegen $\mathfrak{q}$ geht; daraus ergibt sich die behauptete Stetigkeit. Ist $\mathfrak{p} \neq \mathfrak{q}$, so nehmen wir K so klein, daß $\mathfrak{p}$ außerhalb K zu liegen kommt, und wählen eine Ortsuniformisierende z zu $\mathfrak{p}$ und einen Kreis K: $|z| \leqq a$ um $\mathfrak{p}$, der keinen Punkt mit K gemein hat. Ist $\mathfrak{p}^*$ ein in K variabler Punkt, $z(\mathfrak{p}^*) = x + iy$, $\frac{1}{a}|z(\mathfrak{p}^*)| = r$, dann folgt aus (36) und (22):

$$\left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}}{\partial x} - \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}}{\partial y} - \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}}{\partial y}\right)^2 < 8\left[\frac{q}{a\alpha(1-q^2)(1-r)}\right]^2,$$

d. i.

$$\left|\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}}{dz} - \frac{d\tau_{\mathfrak{q}}}{dz}\right| < 2\sqrt{2}\,\frac{q}{a\alpha(1-q^2)(1-r)},$$

daher

$$(37) \qquad \lim_{\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}} \frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}}{dz} = \frac{d\tau_{\mathfrak{q}}}{dz}$$

gleichmäßig inbezug auf $\mathfrak{p}^*$, wenn $\mathfrak{p}^*$ auf einen etwas kleineren konzentrischen Kreis als K beschränkt wird ($r \leqq r_0 < 1$). — Liegt $\mathfrak{p}$ in K, so folgt aus (36):

$$\left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial \xi} - \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial \eta} - \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial \eta}\right)^2 < 8\left[\frac{q}{\alpha^2(1-q^2)(1-r)}\right]^2, \quad \left(r = \frac{|\zeta|}{\alpha}\right),$$

somit gleichmäßig für $|\zeta| \leqq r_0\alpha$ (r_0 eine feste Zahl < 1):

$$\lim_{\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}} \frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u_{\mathfrak{q}^*}(\zeta)}{\partial \eta} = \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial \xi}, \frac{\partial u_{\mathfrak{q}}(\zeta)}{\partial \eta}.$$

Nehmen wir die Normierung der additiven Konstanten durch die Gleichung $R_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{q}^*) = 0$ vor, so ergibt sich hieraus durch Integration:

1) $\lim\limits_{\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}} R_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}) = R_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ gleichmäßig für alle $\mathfrak{p}$ in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{q}$;

2) $\lim\limits_{\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}} \Re\,\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}) = \Re\tau_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})$ gleichmäßig für alle $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, wenn man eine beliebig kleine Umgebung der Stelle $\mathfrak{q}$ ausscheidet.

Damit sind die behaupteten Stetigkeitseigenschaften für die (beliebige) Stelle $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{q}$ erwiesen.

(35), (35') fassen wir in die eine Gleichung zusammen

$$(38)\qquad \int_{q_1}^{q_2} \{\Re\tau_{q^*}(\mathfrak{p}) + i\,\Re\tau'_{q^*}(\mathfrak{p})\}\,d\zeta(q^*) = \Re\omega_{q_1 q_2}(\mathfrak{p}) + i\,\Re\omega'_{q_1 q_2}(\mathfrak{p}).$$

$\mathfrak{p}$ liege außerhalb K, und wir benutzen die Zeichen K, $\mathfrak{p}^*$ und $z = z(\mathfrak{p}^*) = x + iy$ wie oben. Ist $f(z)$ eine analytische Funktion der komplexen Variablen z, so ist

$$\frac{\partial}{\partial x}\Re f(z) = \Re\frac{df}{dz}, \quad \frac{\partial}{\partial y}\Re f(z) = -\Im\frac{df}{dz}.$$

Differentiieren wir also die Gleichung (38), in der zunächst $\mathfrak{p}$ durch den variablen Punkt $\mathfrak{p}^*$ ersetzt werde, nach x und y, so erhalten wir:

$$(39)\qquad \int_{q_1}^{q_2} \left\{\Re\frac{d\tau_{q^*}(z)}{dz} + i\,\Re\frac{d\tau'_{q^*}(z)}{dz}\right\} d\zeta(q^*) = \Re\frac{d\omega_{q_1 q_2}(z)}{dz} + i\,\Re\frac{d\omega'_{q_1 q_2}(z)}{dz},$$

$$(39i)\qquad \int_{q_1}^{q_2} \left\{\Im\frac{d\tau_{q^*}(z)}{dz} + i\,\Im\frac{d\tau'_{q^*}(z)}{dz}\right\} d\zeta(q^*) = \Im\frac{d\omega_{q_1 q_2}(z)}{dz} + i\,\Im\frac{d\omega'_{q_1 q_2}(z)}{dz}.$$

Daß die Differentiation unter dem Integralzeichen vorgenommen werden darf, folgt daraus, daß $\frac{d\tau_{q^*}(z)}{dz}$, $\frac{d\tau'_{q^*}(z)}{dz}$ gemäß (37) stetig von q^* abhängen.

Jetzt vollziehen wir den wesentlichen Schluß dieser Untersuchung: aus (39) geht hervor: der Integrand

$$\Re\frac{d\tau_{q^*}(z)}{dz} + i\,\Re\frac{d\tau'_{q^*}(z)}{dz}$$

ist in K eine solche Funktion von $\zeta = \zeta(q^*)$, daß sein Integral nach ζ vom Wege unabhängig ist, d. h. ist *eine reguläre analytische Funktion von* ζ. Anstelle von $\frac{d}{dz}$ schreibe ich auch wohl $\frac{d}{d\mathfrak{p}^*}$. Von der zu q gehörigen Ortsuniformisierenden ζ ist, wie man direkt einsieht oder aus (39) schließt,

$$\Re\frac{d\tau_{q\zeta}(z)}{dz} + i\,\Re\frac{d\tau'_{q\zeta}(z)}{dz}$$

in der Weise abhängig, wie der Wert eines Differentials an einer Stelle von der benutzten Ortsuniformisierenden abhängt. Es gibt also ein für alle q auf $\mathfrak{F}$ außer für $q = \mathfrak{p}^*$ regulär-analytisches Differential $dv_{\mathfrak{p}^*}(q)$, so daß

$$\Re\frac{d\tau_{q^*}(z)}{dz} + i\,\Re\frac{d\tau'_{q^*}(z)}{dz} = \frac{dv_{\mathfrak{p}^*}(\zeta)}{d\zeta}\left(= \frac{dv_{\mathfrak{p}^*}(q^*)}{dq^*}\right)$$

ist. (39) schreibt sich jetzt so:

$$\int\limits_{\mathfrak{q}^*=\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} dv_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{q}^*) = \Re \frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*} + i\,\Re \frac{d\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*}.$$

Diese Formel gilt für einen beliebig ausgedehnten Integrationsweg $\gamma = (\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$, der jetzt nicht länger auf die Umgebung K von $\mathfrak{q}$ beschränkt zu werden braucht; nur muß unter $d\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ dasjenige Differential 3. Gattung verstanden werden, welches auf die in § 14 geschilderte Weise durch Zwischenschalten von Punkten und Summation längs γ hervorgeht. Hingegen ist $d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ von der Art der Zwischenschaltung und darum $\Re\int\limits_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} dv_{\mathfrak{p}^*}$ vom Integrationswege unabhängig oder $\Re v_{\mathfrak{p}^*}$ eine eindeutige Potentialfunktion auf $\mathfrak{F}$, die nur im Punkte $\mathfrak{p}^*$ singulär wird. Das Verhalten im Punkte $\mathfrak{p}^*$ überblickt man, wenn man für Punkte $\mathfrak{q}^*$, die in dem Kreise K um $\mathfrak{p}$ gelegen sind, $z - z(\mathfrak{q}^*)$ als Ortsuniformisierende benutzt:

$$\Re \tau_{\mathfrak{q}^*}(z) = \Re \frac{1}{z - z(\mathfrak{q}^*)} + R_{\mathfrak{q}^*}(z),$$

wo $R_{\mathfrak{q}^*}(z)$, $\frac{\partial R_{\mathfrak{q}^*}(z)}{\partial x}$, $\frac{\partial R_{\mathfrak{q}^*}(z)}{\partial y}$ stetige Funktionen von $\mathfrak{q}^*$, auch an der Stelle z sind; darum ist bis auf ein additives Glied, das bei Annäherung von $\mathfrak{q}^*$ an $\mathfrak{p}^*$ zwischen festen Grenzen bleibt und mithin auch für $\mathfrak{q}^* = \mathfrak{p}^*$ eine reguläre Funktion von $\mathfrak{q}^*$ ist,

$$\Re \frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*} + i\,\Re \frac{d\tau'_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p}^*)}{d\mathfrak{p}^*} \sim \frac{-1}{[z(\mathfrak{p}^*) - z(\mathfrak{q}^*)]^2}$$

d. h. $dv_{\mathfrak{p}^*}(\mathfrak{q}^*)$ ist ein Differential 2. Gattung, dessen Hauptteil an der Stelle $\mathfrak{p}^*$ durch

$$\frac{-dz(\mathfrak{q}^*)}{[z(\mathfrak{q}^*) - z(\mathfrak{p}^*)]^2}$$

geliefert wird und dessen Integral einen eindeutigen Realteil auf $\mathfrak{F}$ besitzt:

$$dv_{\mathfrak{p}^*} = d\tau_{\mathfrak{p}^*} = d\tau_{\mathfrak{p}^* z}.$$

Wir fassen die gewonnenen Ergebnisse zusammen. *Es seien* $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ *zwei verschiedene Punkte auf* $\mathfrak{F}$, z *eine Ortsuniformisierende zu* $\mathfrak{p}$, ζ *eine solche zu* $\mathfrak{q}$; *diese Ortsuniformisierenden dienen zur eindeutigen Festlegung der Funktionszeichen* $\tau_{\mathfrak{p}}$, $\tau_{\mathfrak{q}}$ *und der Differentiationszeichen* $\frac{d}{d\mathfrak{p}}, \frac{d}{d\mathfrak{q}}$. *Dann gelten die fundamentalen Reziprozitätsgesetze:*

$$(1)\quad \begin{cases} \Re \dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \Re \dfrac{d\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}, & \Re \dfrac{d\tau'_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \Im \dfrac{d\tau_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}, \\[2ex] \Im \dfrac{d\tau_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \Re \dfrac{d\tau'_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}, & \Im \dfrac{d\tau'_{\mathfrak{q}}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \Im \dfrac{d\tau'_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}}. \end{cases}$$

Die Differentiale 3. Gattung entstehen aus denen 2. Gattung nach den Formeln:

$$
\text{(II)}\qquad
\begin{aligned}
&\Re\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau_{\mathfrak{p}} = \Re\,\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} \qquad
&&\Im\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau_{\mathfrak{p}} = \Re\,\frac{d\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}},\\
&\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau'_{\mathfrak{p}} = \Im\,\frac{d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}, \qquad
&&\Im\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau'_{\mathfrak{p}} = \Im\,\frac{d\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}.
\end{aligned}
$$

Einen Sonderfall der in der zweiten Kolonne stehenden Gleichungen erhalten wir, wenn wir $(\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2)$ sich zu einem geschlossenen Wege α auswachsen lassen:

$$
(\mathrm{II}_0)\qquad \int d\tau_{\mathfrak{p}} = 2\pi i\,\Re\,\frac{dw_\alpha(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}, \qquad \int d\tau'_{\mathfrak{p}} = 2\pi i\,\Im\,\frac{dw_\alpha(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}.
$$

Sie zeigen, daß die Differentiale 1. Gattung die Perioden der Elementarintegrale 2. Gattung sind.

Wir lesen ferner aus ihnen folgende drei Tatsachen ab (α, β, γ bedeuten geschlossene Kurven auf $\mathfrak{F}$):

1. ist $\alpha \sim 0$, so ist dw_α identisch $= 0$;
2. ist $\alpha \sim \beta$, so ist $dw_\alpha = dw_\beta$;
3. ist $\alpha + \beta \sim \gamma$, so ist $dw_\alpha + dw_\beta = dw_\gamma$.

Jeder Decktransformation S der Überlagerungsfläche $\hat{\mathfrak{F}}$ der Integralfunktionen in sich entspricht eine Klasse untereinander homologer geschlossener Wege α auf $\mathfrak{F}$: sie sind Spurlinien aller Kurven auf $\hat{\mathfrak{F}}$, die von irgendeinem Punkte $\hat{\mathfrak{p}}$ zu dem darüber gelegenen Punkte $\hat{\mathfrak{p}}S$ hinführen. Allen diesen α gehört nach der 2. der eben bemerkten Tatsachen *dasselbe* Differential dw_α zu, das wir füglich, da es durch S eindeutig bestimmt ist, auch mit dw_S bezeichnen werden. Erstrecken wir die vorzunehmenden Integrationen von einem einfürallemal festgewählten Anfangspunkt $\mathfrak{p}_0$ aus, so ist

$$
-\Re\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} dw_S = u_S(\mathfrak{p})
$$

nur insofern vom benutzten Integrationswege abhängig, als eine Änderung dieses Weges (bei festgehaltenem Endpunkt $\mathfrak{p}$) u_S um eine *ganze* Zahl vermehren oder vermindern kann. (Und durch diese Eigenschaft sind auch die Integrale w_S in der Gesamtheit aller Integrale 1. Gattung ausgezeichnet.) Die Größe

$$
\chi_S(\mathfrak{p}) = e^{2\pi i u_S(\mathfrak{p})}
$$

vom absoluten Betrage 1 ist somit eine eindeutige Funktion von $\mathfrak{p}$. Sind S, T irgend zwei Decktransformationen von $\hat{\mathfrak{F}}$ in sich, so gilt

$$\chi_S(\mathfrak{p}) \cdot \chi_T(\mathfrak{p}) = \chi_{ST}(\mathfrak{p}).$$

Allgemein: ist auf irgend eine Weise jeder Decktransformation S von $\hat{\mathfrak{F}}$ eine Zahl χ_S vom absoluten Betrag 1 so zugeordnet, daß die Multiplikationsregel

$$\chi_S \cdot \chi_T = \chi_{ST}$$

zutrifft, so sagt man, es sei ein **Charakterensystem** (der kommutativen Gruppe aller Decktransformationen von $\hat{\mathfrak{F}}$ in sich) definiert. Dementsprechend wollen wir die den verschiedenen Transformationen S entsprechenden Größen $\chi_S(\mathfrak{p})$ das System der **Integralcharaktere** von $\mathfrak{p}$ nennen. Die sämtlichen Integralcharaktere von $\mathfrak{p}$ geben, heißt soviel als: *simultan* die Werte aller Integrale 1. Gattung an der Stelle $\mathfrak{p}$ angeben — oder genauer: das angeben, was an diesem simultanen Wertsystem gegenüber Verlagerung des Integrationsweges invariant ist. — Für eine spätere Anwendung bemerken wir noch, daß, wenn man ein Charakterensystem als ein Individuum, einen „Punkt" betrachtet, die Gesamtheit aller möglichen Charakterensysteme eine geschlossene $2p$-dimensionale Mannigfaltigkeit bildet. Denn ist

$$S_1, S_2, \cdots, S_{2p}$$

eine Basis für die Gruppe der Decktransformationen von $\hat{\mathfrak{F}}$ (vergl. S. 74), so erhält man alle Charakterensysteme einmal und nur einmal, wenn man

$$\chi_{S_1}, \chi_{S_2}, \cdots, \chi_{S_{2p}}$$

unabhängig voneinander in einer χ-Ebene die Peripherie des Einheitskreises $|\chi| = 1$ durchlaufen läßt.

Mit Hilfe der Formeln (II) *läßt sich das Reziprozitätsgesetz* (I) *von den Differentialen 2. Gattung auf die Integrale 3. Gattung übertragen:*

$$\text{(III)}\begin{cases} \Re\left[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}\right]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Re\left[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, & \Im\left[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}\right]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Re\left[\omega'_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, \\ \Re\left[\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}\right]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Im\left[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}, & \Im\left[\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}\right]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Im\left[\omega'_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}. \end{cases}$$

Diese Gleichungen, die als der *Satz von der Vertauschung von Argument und Parameter* bezeichnet zu werden pflegen, sind gültig, wenn die benutzten Wege $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ sich nicht überkreuzen. Zum Beweise setzen wir voraus, das der Weg $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ ganz in dem z-Kreise K um $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ ganz in dem ζ-Kreise K um $\mathfrak{q}$ liegt. Wir können annehmen (was ev. erst durch Drehung des Koordinatenkreuzes erreicht werden muß, die aber auf die Bedeutung der Differentiale $d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}$, $d\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}$ ohne Einfluß ist) daß die geradlinige Strecke $s = (\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2)$ in der z-Ebene parallel zur reellen (x-) Achse, die Strecke $\sigma = (\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2)$ in der ζ-Ebene zur reellen (ξ-) Achse parallel ist. Ersetzen wir nunmehr in der 1. Gleichung (I) $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ durch die innerhalb

K, bezw. K variablen Punkte $\mathfrak{p}^*, \mathfrak{q}^*$ (wobei zur eindeutigen Festlegung der Bezeichnung wie oben die Uniformisierenden z und ζ zu benutzen sind) und integrieren dann nach $z = z(\mathfrak{p}^*)$ längs s, nach $\zeta = \zeta(\mathfrak{q}^*)$ längs σ, so kommt

$$\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}\int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} \Re \frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz} \cdot dz\, d\zeta = \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} \Re \frac{d\tau_{\mathfrak{p}^*}(\zeta)}{d\zeta} \cdot d\zeta\, dz\,.$$

Da die innere Integration auf der linken Seite parallel zur reellen Achse verläuft, liefert ihre Ausführung

$$\int^{\mathfrak{p}_2} \Re \frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(z)}{dz} \cdot dz = \Re \int^{\mathfrak{p}_2} d\tau_{\mathfrak{q}^*} = \Re \frac{d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}(\zeta)}{d\zeta}$$

und aus demselben Grunde

$$\int^{\mathfrak{q}} \Re \frac{d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}(\zeta)}{d\zeta} \cdot d\zeta = \Re \int_{\mathfrak{q}_1} d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = \Re\left[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2}.$$

Behandelt man in gleicher Weise auch die rechte Seite, so ergibt sich die erste Gleichung (III). Man gewinnt demnach die Gleichungen (III) aus (I) dadurch, daß man diese sowohl nach dem Argument ($\mathfrak{p}$) als nach dem Parameter ($\mathfrak{q}$) integriert, auf einer Seite die Reihenfolge der Integrationen vertauscht und dann die inneren Integrationen mit Hilfe der Gleichungen (II) zur Ausführung bringt.

Um die Modifikationen zu überblicken, welche eintreten, falls die Wege $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ sich schneiden, haben wir den Fall zu betrachten, daß diese beiden Wege in dem z-Kreis K verlaufen. Wir verlagern dann den Weg $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ so, daß er $\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2$ nicht mehr trifft, aber immer noch innerhalb K verläuft. Dadurch ändert sich der Wert der in der 1. und 4. Gleichung (III) auftretenden Größen nicht; diese beiden Formeln sind also ohne jede Einschränkung gültig. Hingegen kann sich der Wert der rechten Seite der 2. und 3. Gleichung durch diese Verlagerung um ein ganzzahliges Vielfaches von 2π vermehren oder vermindern, während der Wert der linken Seiten auch hier erhalten bleibt. Ohne jede Einschränkung sind daher diese beiden Formeln nur in der modifizierten Gestalt zutreffend:

$$\Im\left[\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}\right]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Re\left[\omega'_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} - 2n\pi, \quad \Re\left[\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}\right]_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} = \Im\left[\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2}\right]_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} - 2n\pi$$

$\{n$ eine ganze Zahl$\}$.

Ist $\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2$ insbesondere ein geschlossener Weg α, so hat man

$$(\mathrm{III}_0) \qquad \int d\omega_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = 2\pi i \Re \int_{\mathfrak{p}_1}^{\mathfrak{p}_2} dw_\alpha + 2n\pi i \qquad (n \text{ eine ganze Zahl}),$$

$$\Im \int d\omega'_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_2} = 2\pi \Im \int^{\mathfrak{p}_2} dw_\alpha.$$

Die letzte ergibt, wenn wir auch für $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$ einen geschlossenen Weg β nehmen, das Symmetriegesetz

$$(\mathrm{III}_{00}) \qquad \mathfrak{I}\int dw_\beta = \mathfrak{I}\int dw_\alpha .$$

Es bleibt schließlich noch übrig, diejenigen Integrale 2. Gattung, welche Pole von höherer als 1. Ordnung besitzen, aus den Differentialen $d\tau_\mathfrak{q}$, $d\tau'_\mathfrak{q}$ herzuleiten. Aus (I) ergibt sich durch Differentiation nach $\xi = \xi(\mathfrak{q}^*)$, wenn $\mathfrak{q}$ zuvor durch $\mathfrak{q}^*$ ersetzt wird:

$$\Re \frac{d^2\tau_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2} + i\Re \frac{d^2\tau'_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2} = \left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{d\tau_{\mathfrak{q}^*}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}\right)\right]_{\xi(\mathfrak{q}^*)=0}.$$

Es geht daraus hervor, daß die linke Seite

$$= \frac{d\tau^2_\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}}$$

gesetzt werden kann, wo $d\tau^2_\mathfrak{q}$ ein auf $\mathfrak{F}$ überall reguläres Differential bedeutet, das nur an der Stelle $\mathfrak{q}$ unendlich wird, und zwar, wie der linker Hand stehende Ausdruck zeigt, mit dem Hauptteil $-\frac{2\,d\xi}{\xi^3} = d\left(\frac{1}{\xi^2}\right)$. Die Perioden dieses Integrals $\tau^2_\mathfrak{q}$ 2. Gattung sind rein imaginär. Wir haben so die Relationen:

$$(\mathrm{I}^2)\left\{\begin{aligned} &\Re \frac{d\tau^2_\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \Re \frac{d^2\tau_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}, \quad \mathfrak{I}\frac{d\tau^2_\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \Re \frac{d^2\tau'_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2},\\ &\Re \frac{d\tau^{2\prime}_\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \mathfrak{I} \frac{d^2\tau_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}, \quad \mathfrak{I}\frac{d\tau^{2\prime}_\mathfrak{q}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}} = \mathfrak{I} \frac{d^2\tau'_\mathfrak{p}(\mathfrak{q})}{d\mathfrak{q}^2}.\end{aligned}\right.$$

Wenn man in (II), (II_0) $\mathfrak{p}$ durch $\mathfrak{p}^*$ ersetzt und nach $x = \Re z(\mathfrak{p}^*)$ differentiiert, bekommt man

$$(\mathrm{II}^2)\left\{\begin{aligned} &\Re\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau^2_\mathfrak{p} = \Re \frac{d^2\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}, \quad \mathfrak{I}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau^2_\mathfrak{p} = \Re \frac{d^2\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2},\\ &\Re\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau^{2\prime}_\mathfrak{p} = \mathfrak{I} \frac{d^2\omega_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}, \quad \mathfrak{I}\int_{\mathfrak{q}_1}^{\mathfrak{q}_2} d\tau^{2\prime}_\mathfrak{p} = \mathfrak{I} \frac{d^2\omega'_{\mathfrak{q}_1\mathfrak{q}_2}(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}.\end{aligned}\right.$$

$$(\mathrm{II}^2_0)\left\{\quad \int_\alpha d\tau^2_\mathfrak{p} = 2\pi i\,\Re \frac{d^2 w_\alpha(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}, \quad \int_\alpha d\tau^{2\prime}_\mathfrak{p} = 2\pi i\,\mathfrak{I} \frac{d^2 w_\alpha(\mathfrak{p})}{d\mathfrak{p}^2}.\right.$$

Entsprechende Gleichungen (I^n), (II^n), (II^n_0) gelten für die Integrale mit einem Pol n^{ter} Ordnung.

Man sieht, wie alle diese Beziehungen (die sonst nach Riemann und C. Neumann durch die Methode des „Herumintegrierens" um den Rand der zerschnittenen Fläche hergeleitet zu werden pflegen) eine unmittelbare Folge der anschaulichen und wohlbekannten Tatsache sind, daß man durch

longitudinale Aneinanderreihung von Doppelquellen zwei einfache Quellen mit entgegengesetzten Vorzeichen erhält, durch transversale Aneinanderreihung aber ein Paar entgegengesetzt drehender Wirbel.

§ 17. Die eindeutigen Funktionen auf $\mathfrak{F}$ als Unterklasse der additiven und multiplikativen Funktionen auf $\hat{\mathfrak{F}}$. Riemann-Rochscher Satz und Abelsches Theorem.

Unter einem transzendent normierten Abelschen Integral 2. Gattung oder einer **„additiven Funktion“** verstehen wir eine auf der Überlagerungsfläche $\hat{\mathfrak{F}}$ der Integralfunktionen eindeutige, bis auf Pole reguläre Funktion $v(\hat{\mathfrak{p}})$, welche sich gegenüber jeder Decktransformation S von $\hat{\mathfrak{F}}$ additiv verhält:

$$v(\hat{\mathfrak{p}}S) = v(\hat{\mathfrak{p}}) + ci,$$

wo ci eine zu der Transformation S gehörige, von $\hat{\mathfrak{p}}$ unabhängige, rein imaginäre Konstante bedeutet. Es gibt nur endlich viele Stellen $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, über denen Pole einer solchen additiven Funktion v liegen, und wenn z eine zu $\mathfrak{p}$ und daher auch zu allen darüber gelegenen Punkten von $\hat{\mathfrak{F}}$ gehörige Ortsuniformisierende bedeutet, so hat v an allen über $\mathfrak{p}$ gelegenen Stellen den gleichen „Hauptteil“:

$$\frac{A_{-1}}{z} + \frac{A_{-2}}{z^2} + \cdots + \frac{A_{-r}}{z^r}.$$

Die Pole und zugehörigen Hauptteile können willkürlich vorgeschrieben werden und bestimmen die Funktion v eindeutig bis auf eine additive Konstante:

$$v = \sum_{\mathfrak{p}} \left[\left(a\tau_{\mathfrak{p}} + a'\tau'_{\mathfrak{p}}\right) + \left(a^2\tau^2_{\mathfrak{p}} + a^{2\prime}\tau^{2\prime}_{\mathfrak{p}}\right) + \cdots + \left(a^r\tau^r_{\mathfrak{p}} + a^{r\prime}\tau^{r\prime}_{\mathfrak{p}}\right)\right]$$

$$+ \text{ willk. Konst. } \quad (a^h = \Re A_{-h},\ a^{h\prime} = -\Im A_{-h}) \tag{40}$$

(die Summation erstreckt sich über die verschiedenen Pole $\mathfrak{p}$). Diese Darstellung ist das Analogon zu der *Partialbruchzerlegung* der rationalen Funktionen. Um dieses Analogon zu gewinnen, müssen wir demnach die Klasse der eindeutigen, höchstens mit Polen behafteten Funktionen auf der Fläche $\mathfrak{F}$ zu der umfassenderen Gesamtheit der „additiven Funktionen“ erweitern.

Neben der Partialbruchzerlegung ist die Darstellung der rationalen Funktionen als eines *Produkts von Linearfaktoren* wichtig. Um sie von der Kugel auf beliebige geschlossene Riemannsche Flächen zu übertragen, haben wir von den **„multiplikativen Funktionen“** zu sprechen, d. h. von denjenigen eindeutigen, bis auf Pole regulären Funktionen Θ auf der Überlagerungsfläche $\hat{\mathfrak{F}}$, die sich gegenüber jeder Decktransformation S von $\hat{\mathfrak{F}}$ multiplikativ verhalten:

$$\Theta(\hat{\mathfrak{p}}S) = \mu_S \cdot \Theta(\hat{\mathfrak{p}}),$$

wo der Multiplikator μ_S eine zu S gehörige Konstante vom absoluten Betrag 1 ist.[1]) Die μ_S bilden ein Charakterensystem. Θ hat an allen über einer Stelle $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ gelegenen Punkten dieselbe Ordnung; diese kann positiv sein (dann hat Θ über $\mathfrak{p}$ eine Nullstelle) oder negativ (Θ hat über $\mathfrak{p}$ einen Pol) oder Null. *Die Punkte auf $\mathfrak{F}$, über denen die Nullstellen und Pole einer multiplikativen Funktion liegen sollen, können willkürlich in endlicher Zahl ihrer Lage und Multiplizität nach vorgeschrieben werden — unter der einen Einschränkung, daß die Anzahl der Nullstellen gleich der Anzahl der Pole sein muß, wenn jede Nullstelle und jeder Pol mit der richtigen Vielfachheit in Ansatz gebracht wird. Durch die Vorgabe der Nullstellen und Pole ist aber Θ bis auf einen willkürlichen konstanten Faktor ($\neq 0$) eindeutig bestimmt.* Denn es kann außer der Konstanten keine multiplikative Funktion Θ geben, welche weder Nullstellen noch Pole besitzt; aus einer solchen Funktion entspränge in $\lg|\Theta|$ eine auf $\mathfrak{F}$ eindeutige und überall reguläre Potentialfunktion, die es nicht geben kann. Daß die Anzahl der Nullstellen gleich der der Pole sein muß, ergibt sich daraus, daß $\frac{d\Theta}{\Theta}$ auf $\mathfrak{F}$ ein Differential 3. Gattung ist, dessen Residuensumme

= *Anzahl der Nullstellen minus Anzahl der Pole von* Θ

ist. Sind 1, 2 irgend zwei Punkte auf $\mathfrak{F}$, so ist (vgl. die Zusätze)

$$e^{\omega_{12}} = \Theta_{12} \quad (e = \text{Basis d. natürl. Log.})$$

eine multiplikative Funktion, welche über 1 eine Nullstelle und über 2 einen Pol erster Ordnung besitzt (und durch diese Eigenschaft, nur eine Null- und eine Unendlichkeits-Stelle zu besitzen, dem Linearfaktor $z - a$ oder $\frac{z-a}{z-b}$ auf der z-Kugel entspricht). Sind

$\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_r$ die vorgeschriebenen Nullstellen,

$\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_r$ die vorgeschriebenen Pole

einer Funktion Θ (wobei jede Nullstelle und jeder Pol so oft aufgeführt ist, als seine Multiplizität verlangt), so erhält man das gesuchte Θ aus der Gleichung

$$\Theta = \text{Const.}\, \Theta_{\mathfrak{p}_1\mathfrak{q}_1} \cdot \Theta_{\mathfrak{p}_2\mathfrak{q}_2} \cdots \Theta_{\mathfrak{p}_r\mathfrak{q}_r},$$

in der wir das Analogon zu der Produktdarstellung der rationalen Funktionen vor uns haben. Wir schreiben diese Gleichung auch in der symbolischen Form

1) Vgl. Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, Werke (2. Aufl.), S. 140; namentlich aber Appell, Journal de mathématiques, 3. Ser., Bd. 9 (1883), und Acta Mathematica Bd. 13 (1890).

$$\Theta = \frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_r}. \tag{41}$$

Hier war als selbstverständlich angenommen, daß alle $\mathfrak{p}_\lambda$ von allen $\mathfrak{q}_\lambda$ verschieden sind. Ist das nicht der Fall, so wird dem Symbol rechter Hand diejenige Bedeutung zu erteilen sein, welche herauskommt, wenn man, wie bei gewöhnlichen Brüchen, die sowohl im Zähler als im Nenner vorkommenden Punkte „weghebt".

Der Satz, daß eine multiplikative Funktion ebensooft 0 wie ∞ wird, gilt insbesondere auch für jede eindeutige, von wesentlichen Singularitäten freie Funktion f auf $\mathfrak{F}$. Wenden wir ihn, statt auf f, auf $f-a$ an, wo a eine beliebige Konstante ist, so sehen wir: *Eine eindeutige bis auf Pole reguläre Funktion auf $\mathfrak{F}$ nimmt jeden Wert, einschließlich ∞, gleich oft an.*

Im Falle $p=0$ ist das Integral 2. Gattung $\tau_{\mathfrak{q}}$ auf $\mathfrak{F}$ selber eindeutig; es nimmt infolgedessen, da es nur einen einzigen Pol 1. Ordnung besitzt, jeden Wert einmal und nur einmal an und bildet $\mathfrak{F}$ konform auf die Kugel ab: *Die Kugel ist die einzige Riemannsche Fläche vom Geschlechte* 0.

Wir haben jetzt allgemein zu untersuchen, *wie sich die auf $\mathfrak{F}$ eindeutigen Funktionen als Sonderfälle unter die additiven und multiplikativen Funktionen einordnen*, d. h. wir wollen die Bedingungen dafür aufstellen, wann die Darstellungen (40) und (41) eindeutige Funktionen auf $\mathfrak{F}$ liefern. Dadurch werden wir zum *Riemann-Rochschen Satz*, bzw. zum *Abelschen Theorem* geführt werden. Wir beginnen mit (40) und nehmen zunächst der leichteren Darstellung wegen nur *einfache* Pole an. Es seien also $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_m$ irgend m voneinander verschiedene Punkte auf $\mathfrak{F}$. Eindeutige Funktionen auf $\mathfrak{F}$, welche höchstens in $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_m$ Pole 1. Ordnung haben, sonst aber regulär sind, müssen von der Form sein:

$$f=(a_1\tau_{\mathfrak{p}_1}+a_1'\tau_{\mathfrak{p}_1}')+(a_2\tau_{\mathfrak{p}_2}+a_2'\tau_{\mathfrak{p}_2}')+\cdots+(a_m\tau_{\mathfrak{p}_m}+a_m'\tau_{\mathfrak{p}_m}')+(b+ib'), \tag{42}$$

wo die a_h, a_h'; b, b' reelle Konstante bedeuten. Die Bedingung, daß die $2p$ Perioden von f, die den $2p$ Rückkehrschnitten α_l einer kanonischen Zerschneidung entsprechen, verschwinden müssen, liefert $2p$ *homogene lineare Gleichungen für die a_h, a_h'* mit reellen Koeffizienten, Gleichungen, denen man sicher dann durch Konstante a_h, a_h', die nicht sämtlich verschwinden, genügen kann, wenn $m>p$ ist.

Gibt man also mehr als p Punkte auf $\mathfrak{F}$ willkürlich vor, so existieren stets nicht-konstante eindeutige Funktionen auf $\mathfrak{F}$, die höchstens an diesen Stellen Pole 1. Ordnung haben, sonst aber regulär sind. ***Damit ist insbesondere die Existenz nicht-konstanter eindeutiger, bis auf Pole regulärer Funktionen auf jeder geschlossenen Riemannschen Fläche sichergestellt.***

Sind $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_r$ irgend r voneinander verschiedene Punkte auf

$\mathfrak{F}$ und $m_1, m_2, \ldots, m_r$ zugeordnete ganze Zahlen ($> 0, = 0$ oder < 0), so bezeichnen wir eine Funktion oder ein Differential auf $\mathfrak{F}$, das an der Stelle $\mathfrak{p}_h$ mindestens die Ordnung m_h hat ($h = 1, 2, \ldots, r$), sonst aber regulär ist, als ein **Multiplum** des **Divisors**[1])

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \mathfrak{p}_2^{m_2} \ldots \mathfrak{p}_r^{m_r}.$$

Es ist zweckmäßig zu verabreden, mit solchen Divisoren — Symbolen, die aus einer Zusammenstellung von endlichvielen Punkten mit zugehörigen Ordnungszahlen (Exponenten) bestehen — hinsichtlich Multiplikation und Division wie mit gewöhnlichen Brüchen zu rechnen. Die Exponentensumme $\sum_{h=1}^{r} m_h = m$ nennen wir die **Gesamtordnung** des Divisors. Der eben ausgesprochene Satz läßt sich dann dahin verallgemeinern:

Ist die Gesamtordnung m eines Divisors $\mathfrak{d}$ nicht kleiner als p, so gibt es unter den eindeutigen Funktionen auf $\mathfrak{F}$ Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$, und zwar mindestens $m + 1 - p$ (im komplexen Sinne) *linear unabhängige.*

Sind von den Exponenten m_h nämlich die ersten s positiv, die andern negativ, so hängen diejenigen additiven Funktionen, welche über $\mathfrak{p}_h$ höchstens einen Pol der m_h^{ten} Ordnung haben ($h = 1, 2, \ldots, s$) und sonst regulär sind, homogenlinear von $2\left(1 + \sum_{h=1}^{s} m_h\right)$ reellen Konstanten ab. Die Forderung, daß die sämtlichen Perioden der additiven Funktion verschwinden sollen, bringt $2p$ lineare homogene reelle Gleichungen für diese Konstanten mit sich, die Forderung, daß die Funktion an den Stellen $\mathfrak{p}_{s+1}, \ldots, \mathfrak{p}_r$ bzw. in der Ordnung $-m_{s+1}, \ldots, -m_r$ verschwinden soll, weitere $2 \sum_{h=s+1}^{r} (-m_h)$ solche Gleichungen. Der Überschuß der Zahl der Unbekannten über die Zahl der Gleichungen

$$2\left(1 + \sum_{h=1}^{s} m_h\right) - 2p - 2 \sum_{h=s+1}^{r} (-m_h) = 2(m + 1 - p)$$

gibt eine untere Grenze für die Anzahl der (im reellen Sinne) linear unabhängigen Lösungssysteme.

Die vollständigste Antwort auf diese Fragen liefert jedoch erst der Riemann-Rochsche Satz[2]). Wir nehmen als übersichtlichstes Beispiel wieder

---

1) Diese Sprechweise entstammt der arithmetischen Theorie der algebraischen Funktionen von Hensel und Landsberg; vgl. Hensel und Landsberg, Theorie der algebraischen Funktionen einer Variablen, Leipzig (Teubner) 1902.

2) Riemann betrachtet nur den sog. „allgemeinen" Fall ($R = p$ in der Bezeichnung des Textes); das für jeden *ganzen* Divisor $\mathfrak{d}$ ausnahmslos gültige Resultat rührt her von G. Roch, Crelles Journal, Bd. 64 (1865), S. 372—376; gebrochene Divisoren sind von Klein (Riemannsche Flächen I, autographierte Vor-

einen „ganzen“, aus lauter einfachen Punkten zusammengesetzten Divisor

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_m.$$

Die $2p$ linearen homogenen Gleichungen, welche das Verschwinden der Perioden von (42) für die Rückkehrschnitte α_h verlangen, lauten gemäß (II_0) § 16:

$$\sum \left(a_l \Re \frac{d w_h(\mathfrak{p}_l)}{d \mathfrak{p}_l} + a_l' \Im \frac{d w_h(\mathfrak{p}_l)}{d \mathfrak{p}_l} \right) = 0. \tag{43}$$

$$(h = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Ist der „Rang“ dieses Gleichungssystems $= 2R$ (d. h. ist $2R$ die Anzahl der linear unabhängigen unter diesen $2p$ Gleichungen für die $2m$ Unbekannten a_l, a_l'), so gibt es genau

$$A = m + 1 - R$$

im komplexen Sinne linear unabhängige Funktionen auf $\mathfrak{F}$, welche Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ sind. Das zu (43) gehörige „transponierte“ Gleichungssystem (in dem die Zeilen zu Kolonnen, die Kolonnen zu Zeilen geworden sind) und dessen reelle Unbekannte wir mit b_h $(h = 1, 2, \ldots, 2p)$ bezeichnen, lautet:

$$\Re \left(\sum_{h=1}^{2p} b_h \frac{d w_h(\mathfrak{p}_l)}{d \mathfrak{p}_l} \right) = 0,$$

$$[l = 1, 2, \ldots, m]$$

$$\left(\sum_{h=1}^{2p} b_h \frac{d w_h(\mathfrak{p}_l)}{d \mathfrak{p}_l} \right) = 0.$$

Sein Rang ist der gleiche: $2R$, und die Anzahl seiner linear unabhängigen Lösungssysteme $\{b_h\}$ demnach $2p - 2R$. Das heißt aber: die Anzahl B der (im komplexen Sinne) linear unabhängigen Differentiale 1. Gattung, welche an den Stellen $\mathfrak{p}_l (l = 1, 2, \ldots, m)$ verschwinden, ist

$$B = p - R.$$

Die damit erwiesene Relation

$$A = B + (m + 1 - p)$$

bildet den Inhalt des Riemann-Rochschen Satzes. Durch ihn wird die Aufgabe, die Anzahl A zu bestimmen, zwar nicht eigentlich gelöst, aber doch auf eine wesentlich einfachere zurückgeführt. Denn die lineare Schar von Differentialen 1. Gattung, auf die sich die Anzahl B bezieht, ist offenbar ein bei weitem nicht so kompliziertes System wie das der

lesung, Göttingen 1892, S. 110—111), E. Ritter (Math. Ann. Bd. 44, 1894, S. 314), Hensel u. Landsberg (a. a. O., vgl. namentlich S. 362—364) in Betracht gezogen worden.

Funktionen auf der Fläche. Außerdem werden wir sogleich sehen, daß immer, wenn $m > 2p - 2$, $B = 0$ zu setzen ist, da die Gesamtordnung der Nullstellen eines Differentials 1. Gattung $2p - 2$ nicht übersteigen kann. Und schließlich ist die Reziprozität, welche nach dem Riemann-Rochschen Satz zwischen den Funktionen und den Differentialen besteht, an sich eine merkwürdige und interessante Tatsache. Jedenfalls ist dieser Satz einer der wichtigsten Ausgangspunkte für ein tieferes Eindringen in die Natur der Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche.

Enthält der Divisor $\mathfrak{d}$ einen Nenner (negative Exponenten) und kommen in ihm mehrfache Punkte vor (Exponenten > 1 oder < -1), so hat man, indem im übrigen das Beweisverfahren dasselbe bleibt, noch die Gleichungen (II) und ev. (II_0^n), (II^n) des vorigen Paragraphen heranzuziehen.[1] Das Ergebnis ist analog. Wir können es so aussprechen:

(*Riemann-Rochscher Satz.*) *Zwischen der Anzahl B der* (im komplexen Sinne) *linear unabhängigen Differentiale, welche Multipla des beliebigen Divisors $\mathfrak{d}$ von der Gesamtordnung m sind, und der Anzahl A der linear unabhängigen, auf $\mathfrak{F}$ eindeutigen Funktionen, welche Multipla des reziproken Divisors $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ sind, besteht die Beziehung*

$$A = B + (m + 1 - p).$$

Wir haben gesehen: ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_m}$ existiert unter den eindeutigen, nicht-konstanten Funktionen auf $\mathfrak{F}$ immer dann, wenn $m > p$ ist. Wir setzen hinzu: Falls $m \leqq p$, ist ein solches Multiplum *im allgemeinen*, nämlich außer für besondere Lagen der m Punkte $\mathfrak{p}_i$, *nicht* vorhanden. Dadurch wird die funktionentheoretische Bedeutung der Geschlechtszahl p von neuem in ein helles Licht gerückt. Ein nicht-konstantes Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_p}$ existiert unter den Funktionen auf $\mathfrak{F}$ gemäß dem Riemann-Rochschen Satz dann und nur dann, wenn ein Differential 1. Gattung dw vorhanden ist, das an den Stellen $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \dots, \mathfrak{p}_p$ (aber nicht identisch) verschwindet. Bedeutet

$$dw_1^*, dw_2^*, \dots, dw_p^*$$

eine komplexe Basis für die Differentiale 1. Gattung, so müssen sich also

---

1) Vgl. die angeführten Stellen bei Klein und Hensel-Landsberg. E. Ritter schließt a. a. O. so: Ist $f_0 = \frac{\mathfrak{d}'}{\mathfrak{d}}$ *eine* Funktion, welche ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ ist ($\mathfrak{d}'$ ganz), so erhalte ich *alle* solchen Funktionen f aus: $f = f_0 \cdot f'$, f' Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{d}'}$, und komme dadurch auf den Fall eines *ganzen* Divisors $\mathfrak{d}'$ zurück. Hier fehlt aber der Nachweis, daß [wenn $B + (m + 1 - p) > 0$ ist] überhaupt ein f_0 existiert.

nicht sämtlich verschwindende komplexe Zahlen $c_1^*, c_2^*, \ldots, c_p^*$ so ermitteln lassen, daß

$$c_1^* dw_1^* + c_2^* dw_2^* + \cdots + c_p^* dw_p^*$$

in jenen p Punkten Nullstellen besitzt. Wir wählen irgend p voneinander verschiedene Punkte $\mathfrak{p}_1^0, \mathfrak{p}_2^0, \ldots, \mathfrak{p}_p^0$, zugehörige Ortsuniformisierende z_h und zu jedem $\mathfrak{p}_h^0$ derart einen z_h-Kreis K_h: $|z_h| \leqq a_h$ $(h = 1, 2, \cdots, p)$, daß diese Kreise gegenseitig nicht ineinander eindringen. Würde bei jeder Lage der Punkte $\mathfrak{p}_h$ innerhalb K_h eine Differential 1. Gattung existieren, das an den Stellen $\mathfrak{p}_h$ simultan verschwindet, so müßte identisch in $z_1, z_2, \ldots, z_p$ $(|z_h| \leqq a_h)$

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} \frac{dw_1^*(z_1)}{dz_1}, & \ldots & \frac{dw_p^*(z_1)}{dz_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{dw_1^*(z_p)}{dz_p}, & \ldots & \end{vmatrix}$$

sein. Das steht aber im Widerstreit zu der linearen Unabhängigkeit der Differentiale dw_h^*. Denn denken wir uns z_1 in $\Delta = 0$ variabel, aber $z_2, \ldots, z_p$ einen Moment lang festgehalten, so haben wir eine homogene lineare Beziehung zwischen den Differentialen $dw_h^*(z_1)$ vor uns, die identisch in z_1 erfüllt ist; es müssen also die Koeffizienten dieser Beziehung, d. h. die aus den $p - 1$ letzten Zeilen von Δ gebildeten Unterdeterminanten sämtlich einzeln verschwinden, und zwar identisch in $z_2, \ldots, z_p$. Wiederholen wir diesen Schluß, indem wir ihn jetzt, statt auf Δ, auf eine jede der erwähnten $(p - 1)$-reihigen Unterdeterminanten anwenden, und fahren so Schritt für Schritt fort, so versteigen wir uns schließlich bis zu der unsinnigen Behauptung, daß die Elemente der letzten Zeile, d. h. die Differentiale dw_h^* selber identisch $= 0$ sind.

Zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ erhalten wir durch die Formel

$$d\tau_{\mathfrak{p}} - i\, d\tau'_{\mathfrak{p}} = dw_{\mathfrak{p}}$$

ein Differential 1. Gattung.[1]) Dies ist eine sehr naheliegende Methode zur Erzeugung solcher Differentiale aus denen der 2. Gattung; es fragt sich nur, ob sie umfassend genug ist, um eine volle Basis für die Differentiale 1. Gattung zu liefern. Diese Frage können wir jetzt bejahend beantworten. Wähle ich nämlich p Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$ so, daß keine eindeutige Funktion $\neq$ const. auf $\mathfrak{F}$ existiert, die ein Multiplum von $\frac{1}{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_p}$ ist, so bilden die zugehörigen $dw_{\mathfrak{p}_1}, dw_{\mathfrak{p}_2}, \ldots, dw_{\mathfrak{p}_p}$ eine kom-

1) Veränderte Wahl der Ortsuniformisierenden zu $\mathfrak{p}$ bewirkt nur eine Multiplikation desselben mit einem konstanten Faktor, so daß wir es als wesentlich durch $\mathfrak{p}$ allein bestimmt ansehen können.

plexe Basis der Differentiale 1. Gattung. Bestände nämlich eine Relation

$$C_1 dw_{\mathfrak{p}_1} + C_2 dw_{\mathfrak{p}_2} + \cdots + C_p dw_{\mathfrak{p}_p} = 0,$$

so wäre für jeden geschlossenen Weg α auf $\mathfrak{F}$:

$$\sum_{h=1}^{p} C_h \Big(\int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}h} - i \int_\alpha d\tau'_{\mathfrak{p}h} \Big) = 0.$$

Behalten wir von dieser Gleichung etwa nur den Imaginärteil bei ($c_h = \Re C_h$, $c_h' = \Im C_h$):

$$\sum_{h=1}^{r} \Big(c_h \int_\alpha d\tau_{\mathfrak{p}h} + c_h' \int_\alpha d\tau'_{\mathfrak{p}h} \Big) = 0,$$

so zeigt sich, daß

$$\sum_{h=1} (c_h \tau_{\mathfrak{p}h} + c_h' \tau'_{\mathfrak{p}h})$$

eine eindeutige Funktion auf der Fläche sein müßte.

Zur Gewinnung von Funktionen auf der Fläche stehen uns zwei Wege offen: entweder additive Funktionen mit solchen Konstanten linear zu kombinieren, daß die Perioden zum Verschwinden gebracht werden, — oder zwei Differentiale durcheinander zu dividieren.[1]) Indem man beide Möglichkeiten kombiniert, kann man zu wichtigen Sätzen gelangen. Vorab bemerken wir: da der Quotient zweier Differentiale eine Funktion auf $\mathfrak{F}$ ist, wird

1) jedes Differential durch den repräsentierenden Divisor, in dessen Zähler die Nullstellen des Differentials in ihrer Multiplizität verzeichnet stehen und dessen Nenner die Pole enthält, bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt — und

2) ist die Gesamtordnung d dieses repräsentierenden Divisors für alle Differentiale die gleiche; d ist die Anzahl der Nullstellen eines jeden Differentials 1. Gattung und also für $p > 0$ gewiß $\geqq 0$. Wir werden beweisen, daß diese wichtige Invariante einer jeden Riemannschen Fläche *allein von der Geschlechtszahl p abhängt*, und zwar nach der einfachen Gleichung:

$$d = 2p - 2.$$

Es seien $\mathfrak{d}$, $\mathfrak{e}$ zwei Divisoren von der Gesamtordnung m bzw. n, deren Produkt $\mathfrak{d}\mathfrak{e}$ Repräsentant eines Differentials dv auf $\mathfrak{F}$ ist: $m + n = d$. Es gebe genau M linear unabhängige Differentiale, welche Multipla von

1) Diese letzte Methode ist auch auf *offene* Riemannsche Flächen anwendbar und liefert hier sofort den Existenznachweis für Funktionen auf der Fläche, die sich nicht auf bloße Konstante reduzieren. Vgl. auch Koebe, Crelles Journal Bd. 139, 1911, S. 291 f.

$\mathfrak{d}$, und N solche Differentiale, welche Multipla von $\mathfrak{e}$ sind. Wir fassen unter den eindeutigen Funktionen auf $\mathfrak{F}$ alle Multipla f von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ ins Auge. Erzeugen wir sie durch Zusammensetzung von additiven Funktionen, so liefert der Riemann-Rochsche Satz das Resultat, daß die Anzahl der linear unabhängigen f

$$= m + 1 - p + M$$

ist. Für jedes f ist das Differential $f dv$ ein Multiplum von $\mathfrak{e}$; d. h. auf eine zweite Art erhalten wir die sämtlichen Funktionen f dadurch, daß wir alle Differentiale, welche Multipla von $\mathfrak{e}$ sind, durch dv dividieren. Achten wir nur auf die Anzahlen, so liefert das die Relation

$$N = m + 1 - p + M.$$

Analog

$$M = n + 1 - p + N.$$

Addition dieser beiden Gleichungen ergibt

$$d = 2p - 2,$$

Subtraktion den *Brill-Noetherschen Reziprozitätssatz*:[1])

$$2(M - N) = n - m.$$

Doch genug mit diesen Betrachtungen, die sich alle wie von selber an die „Partialbruchzerlegung" (40) anknüpfen! Wir wenden uns zur „Produktdarstellung" (41). Um den zu S gehörigen Multiplikator μ_S von

$$\Theta = \frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_r}{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \cdots \mathfrak{q}_r}$$

zu berechnen, legen wir eine geschlossene Kurve α auf $\mathfrak{F}$, die nicht durch die $\mathfrak{p}_h$, $\mathfrak{q}_h$ hindurchgeht und auf $\hat{\mathfrak{F}}$ von einem Punkte $\hat{\mathfrak{p}}$ zum Punkte $\hat{\mathfrak{p}}S$ hinführt, und ziehen Integrationswege $\mathfrak{p}_h\mathfrak{q}_h$. Dann ist nach (III$_0$), § 16:

$$(44) \qquad \mu_S = \prod_{h=1} e^{\int_\alpha d\omega_{\mathfrak{p}_h\mathfrak{q}_h}} = \prod_{h=1} e^{-2\pi i \cdot \Re \int_{\mathfrak{q}_h}^{\mathfrak{p}_h} d w_\alpha} = \prod_{h=1} \frac{\chi_S(\mathfrak{p}_h)}{\chi_S(\mathfrak{q}_h)}.$$

Es liegt nahe, als **Integralcharaktere** eines beliebigen Divisors

$$\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_1^{m_1} \mathfrak{p}_2^{m_2} \cdots \mathfrak{p}_r^{m_r}$$

die Größen

$$\chi_S(\mathfrak{d}) = \chi_S(\mathfrak{p}_1)^{m_1} \cdot \chi_S(\mathfrak{p}_2)^{m_2} \cdots \chi_S(\mathfrak{p}_r)^{m_r}$$

einzuführen. Dann lautet die Gleichung (44) in Worten[2]):

Die Multiplikatoren einer Funktion Θ stimmen überein mit den Integralcharakteren des repräsentierenden Divisors.

1) A. Brill und M. Nöther, Mathematische Annalen Bd. 7 (1874), S. 283.
2) Vgl. Appell, Acta Mathematica Bd. 13 (1890), S. 13—14 der Preisschrift.

Insbesondere ($\mu_S = 1$):

Vorgegebene Punkte $\mathfrak{p}_h, \mathfrak{q}_h$ ($h = 1, 2, \cdots, r$) *sind dann und nur dann die sämtlichen Nullstellen bzw. Pole einer auf* $\mathfrak{F}$ *eindeutigen Funktion, wenn das Produkt der Integralcharaktere der Nullstellen gleich ist dem Produkt der Integralcharaktere der Pole:*

$$\prod_{h=1}^{r} \chi_S(\mathfrak{p}_h) = \prod_{h=1}^{r} \chi_S(\mathfrak{q}_h).$$

Gehen wir auf die Bedeutung der Integralcharaktere zurück und benutzen eine bestimmte kanonische Zerschneidung α_h samt einer zugehörigen reellen Basis $dw_{\alpha_h} = dw_h$ der Integrale 1. Gattung, so können wir diese Forderung durch die folgenden $2p$ Gleichungen ersetzen:

$$\sum_{l=1}^{r} \Re \int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}_l} dw_h - \sum_{l=1}^{r} \Re \int_{\mathfrak{q}_0}^{\mathfrak{q}_l} dw_h = n_h \qquad (n_h = \text{ganze Zahl})$$
$$[h = 1, 2, \cdots, 2p].$$

Die Integrationswege $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_l$, $\mathfrak{q}_0\mathfrak{q}_l$ sind dabei zunächst beliebig. Verlagern wir aber einen dieser Integrationswege, etwa $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}_1$, nachträglich so, daß seine alte und seine neue Lage zusammen eine geschlossene Linie bilden, welche homolog

$$(n_1\alpha_2 - n_2\alpha_1) + \cdots + (n_{2p-1}\alpha_{2p} - n_{2p}\alpha_{2p-1})$$

ist, so werden dadurch die ganzen Zahlen n_h auf der rechten Seite der letzten Gleichung zu 0 gemacht. Es ergibt sich dann:

(*Abelsches Theorem.*)[1] *Die Punkte* $\mathfrak{p}_h, \mathfrak{q}_h$ $[h = 1, 2, \cdots, r]$ *sind dann und nur dann die sämtlichen Nullstellen bzw. Pole einer Funktion auf* $\mathfrak{F}$, *wenn — bei geeigneter, von* w *unabhängiger Wahl der nach*

1) Der Name, wie ich ihn hier gebrauche, ist nicht ganz zutreffend. Von Abel rührt nur der Satz her, daß die ausgesprochene Bedingung *notwendig* ist; anderseits aber ist der von Abel aufgestellte Satz [in großartiger Einfachheit von ihm entwickelt in der kurzen Note „Démonstration d'une propriété générale d'une certaine classe de fonctions transcendentes", Crelles Journal Bd. 4 (1829), S. 200—201 = Œuvres complètes, Nouvelle édition (1881), Bd. I, S. 515—517] allgemeiner, sofern er nicht nur die Integrale 1. Gattung betrifft. Vgl. S. 136 dieser Schrift. Eine von Abel im Jahre 1826 der Pariser Akademie eingereichte Arbeit „Mémoire sur une propriété générale d'une classe très-étendue de fonctions transcendentes" über diesen Gegenstand ist durch die Schuld Cauchys lange verloren gewesen und erst nach Abels Tod veröffentlicht worden: Mémoires présentés par divers savants, Bd. VII (1841) = Abel, Œuvres complètes, Nouvelle édition (1881) Bd. I, S. 145—241. Ferner ist das Theorem enthalten in Abels nachgelassenem Manuskript „Sur la comparaison des fonctions transcendentes", Œuvres complètes, Bd. II, S. 55—66. Die Umkehrung des Abelschen Theorems für die Integrale 1. Gattung steht bei Riemann zwischen den Zeilen, wurde explizit aber erst durch Clebsch (ohne völlig zureichenden Beweis) ausgesprochen (Crelles Journal Bd. 63, 1864, S. 198), und von ihm in der Theorie der algebraischen Kurven aufs ausgiebigste verwertet.

$\mathfrak{p}_h$, $\mathfrak{q}_h$ *hinführenden Integrationswege — für jedes Integral 1. Gattung w die Beziehung*

$$\sum_{h=1}^{r} w(\mathfrak{p}_h) = \sum_{h=1}^{r} w(\mathfrak{q}_h)$$

statthat.

Sind dv_1, dv_2 irgend zwei bis auf Pole reguläre Differentiale auf $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$ die sie repräsentierenden Divisoren, so ist, da $\frac{dv_1}{dv_2} = \frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}$ eine Funktion auf $\mathfrak{F}$ ist, nach dem Abelschen Theorem

$$\chi_S\left(\frac{\mathfrak{d}_1}{\mathfrak{d}_2}\right) = \frac{\chi_S(\mathfrak{d}_1)}{\chi_S(\mathfrak{d}_2)} = 1 \quad \text{oder} \quad \chi_S(\mathfrak{d}_1) = \chi_S(\mathfrak{d}_2).$$

Wir haben also dieses Korollar des Abelschen Theorems:

Für alle Differentiale auf $\mathfrak{F}$ bzw. deren repräsentierende Divisoren haben die Integralcharaktere die gleichen Werte χ_S^0. Ein Divisor $\mathfrak{d}$ von der Gesamtordnung $2p - 2$ ist dann und nur dann Repräsentant eines Differentials, wenn das System seiner Integralcharaktere mit dem Charakterensystem χ_S^0 übereinstimmt.

Wir machen von dem Abelschen Theorem sogleich eine Anwendung auf den Fall $p = 1$. Hier existiert bis auf einen konstanten Faktor nur ein einziges Differential 1. Gattung dw. Die den verschiedenen Integrationswegen entsprechenden Werte, welche $w(\mathfrak{p})$ an einer Stelle $\mathfrak{p}$ anzunehmen vermag, bilden in der komplexen w-Ebene ein *parallelogrammatisches Punktgitter.* Alle Gitter, welche so den einzelnen Punkten $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ zugeordnet erscheinen, gehen auseinander durch Parallelverschiebung hervor, oder haben, wie wir sagen wollen, dieselbe „Lage und Gestalt“ Λ. Dadurch, daß wir jedes Gitter von dieser Lage und Gestalt als einen „Punkt“ auffassen, verwandelt sich die w-Ebene in eine geschlossene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_\Lambda$ (vgl. S. 28). Würde zwei verschiedenen Punkten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ von $\mathfrak{F}$ jemals das gleiche Gitter entsprechen, so gäbe es nach dem Abelschen Theorem eine Funktion auf $\mathfrak{F}$, die nur in $\mathfrak{p}$ einen Pol 1. Ordnung besäße (und in $\mathfrak{q}$ Null würde); diese Funktion müßte die Fläche umkehrbar eindeutig und konform auf die Kugel abbilden, was mit $p = 1$ unverträglich ist. Verschiedenen Punkten $\mathfrak{p}$ entsprechen also immer verschiedene Gitter $w = w(\mathfrak{p})$. Deshalb kann dw nirgends 0 sein, wie auch aus unserer allgemeinen Formel $d = 2p - 2$ für $p = 1$ folgt. $\mathfrak{F}$ ist somit umkehrbar eindeutig und umkehrbar gebietsstetig (außerdem konform) abgebildet auf ein Gebiet $\mathfrak{G}$ der Mannigfaltigkeit $\mathfrak{F}_\Lambda$. Da $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, muß auch $\mathfrak{G}$ geschlossen und folglich mit ganz $\mathfrak{F}_\Lambda$ identisch sein: *$\mathfrak{F}_\Lambda$ ist der gegebenen Riemannschen Fläche konform-äquivalent und kann als Normalform der Riemannschen Flächen vom Geschlechte* 1 *angesprochen werden.* Die w-Ebene ist für $\mathfrak{F}_\Lambda$ „Über-

lagerungsfläche der Integralfunktionen“ (denn w ist selber eine Integralfunktion), zugleich aber, da die Ebene einfach zusammenhängend ist, die „universelle“ Überlagerungsfläche. w ist für die Funktionen auf der Grundfläche $\mathfrak{F}$ eine *uniformisierende Variable*, d. h. alle diese Funktionen stellen sich dar als eindeutige Funktionen der in der schlichten Ebene variierenden komplexen Veränderlichen w, und zwar geschieht die Darstellung hier — dem Umstande entsprechend, daß zu allen Punkten w eines Λ-Gitters vermöge $w = w(\mathfrak{p})$ *derselbe* Punkt $\mathfrak{p}$ gehört —, durch *doppeltperiodische, sog. elliptische Funktionen.* Zwei Riemannsche Flächen vom Geschlechte 1 sind in ihrer Normalform $\mathfrak{F}_{\Lambda'}$, $\mathfrak{F}_{\Lambda''}$ dann und nur dann konform-äquivalent, wenn die Gitter von der Gestalt Λ' und Λ'' Euklidisch-ähnlich sind.

Das im Falle $p = 1$ durch die elliptischen Funktionen gelöste „*Umkehrproblem*“ besteht für eine Fläche $\mathfrak{F}$ von beliebigem Geschlecht p in folgendem: Ist $w_h^*[h = 1, 2, \ldots, p]$ eine komplexe Basis der Differentiale 1. Gattung auf $\mathfrak{F}$, so sollen zu beliebig vorgegebenen Zahlen $\mathfrak{c}_1, \ldots, \mathfrak{c}_p$ Punkte $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_p$ auf $\mathfrak{F}$ so gefunden werden, daß (bei geeigneter Wahl der Integrationswege)

$$(45) \qquad \sum_{l=1}^{p} w_h^*(\mathfrak{p}_l) = \mathfrak{c}_h \quad [h = 1, 2, \ldots, p]$$

wird. Dieses Umkehrproblem ist im Anschluß an das Abelsche Theorem von Jacobi aufgestellt worden und fand nach wichtigen Vorarbeiten von Göpel und Rosenhain allgemein durch Riemann und Weierstraß mit Hilfe der ϑ-Funktionen, gewissen ganzen transzendenten Funktionen der p Argumente $\mathfrak{c}_h$, seine Erledigung.[1]) Das Problem kann offenbar auch so formuliert werden: Zu einem vorgegebenen Charakterensystem χ_S sollen Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$ bestimmt werden, für die

$$(46) \qquad \chi_S(\mathfrak{p}_1) \cdot \chi_S(\mathfrak{p}_2) \cdots \chi_S(\mathfrak{p}_p) = \chi_S$$

wird; und es ist dann nach dem Abelschen Theorem der Aufgabe äquivalent, eine Funktion

$$\Theta = \frac{\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \cdots \mathfrak{p}_p}{\cdots}$$

1) Riemann, Theorie der Abelschen Funktionen, Crelles Journal, Bd. 54 (1857) = Werke, 2. Aufl., S. 88—142; Über das Verschwinden der Theta-Funktionen, Crelles Journal, Bd. 65 (1865) = Werke, S. 212—224. Weierstraß, Vorlesungen über die Theorie der Abelschen Transzendenten, Werke, Bd. 4. Stahl, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1896. Prym und Rost, Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, Leipzig 1911, 2. Teil, 7. Abschnitt. Krazer, Lehrbuch der Thetafunktionen, Leipzig 1903. — Die große Bedeutung des Umkehrproblems liegt für uns Heutige nicht nur (und wohl nicht einmal überwiegend) in seinem Wert an sich als in den großartigen Gedankenreihen, zu deren Schöpfung Riemann und Weierstraß durch die Bemühungen um seine Lösung getrieben wurden.

mit vorgegebenen Multiplikatoren χ_S zu finden, die nur an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ einen Pol von höchstens p^{ter} Ordnung besitzt. Es ordnet sich dadurch naturgemäß der folgenden allgemeinen Fragestellung unter:

Die Funktionen Θ mit vorgegebenem Multiplikatorsystem χ_S bilden eine lineare Schar G_χ, d. h. man verläßt den Bereich dieser Funktionen nicht, wenn man beliebige von ihnen linear mit konstanten Koeffizienten kombiniert. Ist $\mathfrak{d}$ irgend ein Divisor von der Gesamtordnung m, so wird gefragt nach sämtlichen Funktionen aus G_χ, welche Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ sind, und insbesondere nach der Anzahl A der linear unabhängigen unter ihnen.

Es ist das für das allgemeine Charakterensystem χ_S die gleiche Frage, welche wir auf S. 120—122 für den „**Hauptcharakter**" $\chi_S = 1$ behandelt haben. Die dort gewonnenen Resultate lassen sich vollständig übertragen; zunächst *die Ungleichung*

$$A \geqq m + 1 - p,$$

in der insbesondere ($\mathfrak{d} = \mathfrak{p}_0^p$, $m = p$) *die Lösbarkeit des Umkehrproblems ausgesprochen liegt.* Ist nämlich $\Theta_0 = \mathfrak{d}_0$ irgend eine Funktion aus G_χ — daß solche existieren, ist ein Hilfssatz, dessen Beweis wir sogleich nachholen werden —, so entstehen die in G_χ liegenden Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ dadurch, daß man alle unter den *eindeutigen* Funktionen auf $\mathfrak{F}$ existierenden Multipla von $\frac{1}{\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0}$ mit Θ_0 multipliziert. Die Anzahl der linear unabhängigen unter den letzteren aber ist, da $\mathfrak{d}\mathfrak{d}_0$ wie $\mathfrak{d}$ die Gesamtordnung m besitzt (s. S. 120), $\geqq m + 1 - p$.

Aber auch die Formel des vollständigen Riemann-Rochschen Satzes läßt sich sofort übertragen. Dazu müssen wir neben den multiplikativen Funktionen die von Herrn Prym[1]) in die Theorie eingeführten multiplikativen Differentiale mit heranziehen. Ein solches **multiplikatives** oder **Prymsches Differential** $d\mathsf{T}$ ist auf $\mathfrak{F}$ eindeutig, analytisch, frei von wesentlichen Singularitäten und verhält sich den Decktransformationen S von $\mathfrak{F}$ gegenüber gemäß der Gleichung

$$d\mathsf{T}(\mathfrak{p}S) = \chi_S \cdot d\mathsf{T}(\mathfrak{p}),$$

wo die χ_S konstante Multiplikatoren vom absoluten Betrage 1 sind. Jedes Prymsche Differential kann durch einen Divisor $\mathfrak{t}$ repräsentiert werden, in dessen Zähler diejenigen Punkte mit der richtigen Multipli-

1) Crelles Journal Bd. 70 (1869), S. 354—262; Bd. 71 (1870), S. 223—236 und S. 305—315. Vgl. die auf S. 118 zitierten Arbeiten von Appell, ferner: Prym u. Rost, Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung, Leipzig 1911; R. König, Berichte der kgl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften (mathematisch-physikalische Klasse), Bd. 63 (1911), S. 348—368.

zität verzeichnet stehen, über denen die Nullstellen von $d\mathsf{T}$ liegen und dessen Nenner die Pole von $d\mathsf{T}$ enthält. Aus dem Umstande, daß der Quotient aus einem Prymschen und einem beliebigen Abelschen (d. i. auf $\mathfrak{F}$ eindeutigen) Differential eine Funktion Θ von den gleichen Multiplikatoren wie das Prymsche Differential ist, folgt, daß durch den repräsentierenden Divisor $\mathfrak{t}$ — der beliebig vorgegeben werden kann, wenn nur seine Gesamtordnung $2p-2$ beträgt, — ein Prymsches Differential $d\mathsf{T}$ eindeutig bis auf einen konstanten Faktor bestimmt wird; die Multiplikatoren von $d\mathsf{T}$ sind $=\chi_S(\mathfrak{t}) : \chi_S^0$. Verstehen wir nun unter B die Anzahl der linear unabhängigen Prymschen Differentiale mit den Multiplikatoren χ_S^{-1}, welche Multipla von $\mathfrak{d}$ sind, so gilt der *verallgemeinerte Riemann-Rochsche Satz*[1]):

$$A = B + (m + 1 - p).$$

Denn B ist identisch mit der Anzahl der unter den *Abelschen* Differentialen befindlichen linear unabhängigen Multipla von $\mathfrak{d}\,\mathfrak{d}_0$ (aus denen die in Rede stehenden Prymschen Differentiale mittels Division durch Θ_0 hervorgehen). Schreiben wir χ_S^{-1} statt χ_S, so besteht diese Relation also zwischen

der Anzahl B derjenigen linear unabhängigen *Differentiale*, welche Multipla von $\mathfrak{d}$ sind und das Multiplikatorsystem χ_S besitzen, einerseits,

der Anzahl A derjenigen linear unabhängigen *Funktionen*, welche Multipla des *reziproken* Divisors $\frac{1}{\mathfrak{d}}$ sind und das *reziproke* Multiplikatorsystem $\frac{1}{\chi_S}$ besitzen, anderseits.

Um wenigstens einen konkreten Sonderfall dieses Satzes anzugeben, nehmen wir für $\mathfrak{d}$ den keinen einzigen Punkt mit einem von 0 verschiedenen Exponenten enthaltenden Divisor „1"; dann ist, da es außer der Konstanten keine Funktion Θ ohne Pole gibt, $A = 0$ zu setzen, und nur im Falle des Hauptcharakters $A = 1$. Mithin: *die Prymschen Differentiale 1. Gattung mit vorgegebenen Multiplikatoren bilden eine lineare Schar vom Grade $p-1$* (nur im Falle des Hauptcharakters vom Grade p).

Wir hatten uns bei diesen Überlegungen zu stützen auf den Hilfssatz: *Ist χ_S ein vorgegebenes Charakterensystem, so existieren stets Funktionen Θ, deren Multiplikatoren $= \chi_S$ sind.*

---

1) Zuerst formuliert von E. Ritter, Math. Ann. Bd. 44, S. 314. Vgl. jedoch die Fußnote auf S. 122. Ritter verwendet statt der Divisorensymbolik die von Klein begründete Formentheorie auf Riemannschen Flächen, welche eine reale Darstellung der Divisoren mit Hilfe multiplikativer Formen ermöglicht, und verallgemeinert in Math. Ann. Bd. 47 (1896), S. 157—221, von den durch Riemann in die Theorie der linearen Differentialgleichungen eingeführten Grundsätzen geleitet, seine Untersuchungen auf *Systeme* von n Formen, die sich bei Ausübung einer Decktransformation S homogen-linear transformieren.

Nach dem Abelschen Theorem kommt die Auffindung einer solchen Funktion

$$\Theta_0 = \frac{\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_n}{\mathfrak{q}_1^0 \mathfrak{q}_2^0 \ldots \mathfrak{q}_n^0}$$

darauf hinaus, Punkte $\mathfrak{q}_l$, $\mathfrak{q}_l^0 [l = 1, 2, \ldots, n]$ so zu finden, daß

$$(47) \quad \sum_{l=1}^{n} \{ w_h^*(\mathfrak{q}_l) - w_h^*(\mathfrak{q}_l^0) \} = \text{vorgegebenen Werten } \mathcal{F}_h \ [h = 1, 2, \ldots, p]$$

wird. $\mathfrak{q}_1^0, \ldots \mathfrak{q}_p^0$ seien p voneinander verschiedene Punkte, welche so gelegen sind, daß kein Differential 1. Gattung an diesen p Stellen gleichzeitig verschwindet (S. 123), z_l zugehörige Ortsuniformisierende, K_l solche z_l-Kreise um $\mathfrak{q}_l^0$, welche sich gegenseitig nirgendwo überdecken. Die Gleichungen

$$(48) \qquad \sum_{l=1}^{p} \int_{\mathfrak{q}_l^0}^{\mathfrak{q}_l} dw_h^* = \mathcal{F}_h \quad [h = 1, 2, \ldots, p]$$

für die Unbekannten $\mathfrak{q}_l$ haben, wenn die vorgegebenen Werte $\mathcal{F}_h$ hinreichend klein sind, eine und nur eine Lösung, bei welcher $\mathfrak{q}_l$ (samt dem Integrationswege $\mathfrak{q}_l^0 \mathfrak{q}_l$) innerhalb K_l zu liegen kommt, da die Funktionaldeterminante

$$\left| \frac{dw_h^*(z_l)}{dz_l} \right|_{z_1 = 0, \ldots, z_p = 0} \neq 0.$$

Sind aber $\mathcal{F}_h$ beliebige Werte, so wähle man zunächst eine ganze positive Zahl N so groß, daß eine solche Auflösung $\mathfrak{q}_l [l = 1, 2, \ldots, p]$ der Gleichungen (48) möglich ist, wenn man rechts $\mathcal{F}_h$ durch $\frac{\mathcal{F}_h}{N}$ ersetzt. Dann liegt auch eine Lösung der (unveränderten) Gleichungen (47) vor, bei der $n = Np$ ist und in der Reihe $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_n$ jeder der Punkte $\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_p$, in der Reihe $\mathfrak{q}_1^0 \mathfrak{q}_2^0 \ldots \mathfrak{q}_n^0$ jeder der Punkte $\mathfrak{q}_1^0 \ldots \mathfrak{q}_p^0$ im ganzen N-mal auftritt.

Das Umkehrproblem (46) *ist stets lösbar,* wie wir oben sahen; *es besitzt aber im allgemeinen auch nur eine Lösung.* Die Lösung ist nach dem verallgemeinerten Riemann-Rochschen Satz nämlich nur dann mehrdeutig (unendlich-vieldeutig), wenn ein Prymsches Differential

$$d\mathsf{T} = \mathfrak{p}_0^p \cdot (\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2 \ldots \mathfrak{q}_{p-2}) = \mathfrak{t}$$

mit den Multiplikatoren χ_S^{-1} existiert, das an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ von mindestens p^{ter} Ordnung verschwindet; dann aber ist

$$\chi_S = \frac{\chi_S^0}{\chi_S(\mathfrak{t})} = \chi_S^0 : \prod_{i=1}^{p-2} \chi_S(\mathfrak{q}_i).$$

Innerhalb der $2p$-dimensionalen Mannigfaltigkeit aller möglichen Charaktersysteme bilden diejenigen, welche man aus dieser Formel erhält, wenn $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{p-2}$ unabhängig voneinander die Fläche $\mathfrak{F}$ durchlaufen,

eine nur $(2p - 4)$-dimensionale Mannigfaltigkeit X, die für das Umkehrproblem die Rolle eines *singulären Gebildes* übernimmt.[1])

Ist χ_S ein beliebiges vom Hauptcharakter verschiedenes Charakterensystem, so kann man die Punkte $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2, \ldots, \mathfrak{q}_{p-2}$ so annehmen, daß (bis auf einen konstanten Faktor) nur ein einziges Prymsches Differential 1. Gattung

$$d\mathsf{T} = (\mathfrak{q}_1 \ldots \mathfrak{q}_{p-2}) \cdot (\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_p)$$

mit den Multiplikatoren χ_S existiert, das in jenen Punkten verschwindet, — gemäß dem Satz, daß die Prymschen Differentiale 1. Gattung eine $(p-1)$-dimensionale Schar bilden. Diese Wahl hat zur Folge, daß die Gleichung

$$\prod^{p} \chi_S(\mathfrak{p}_i) = \chi_S \cdot \left(\chi_S^0 : \prod^{p-2} \chi_S(\mathfrak{q}_i) \right)$$

nur eine *einzige Lösung* $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \ldots \mathfrak{p}_p$ besitzt, oder: daß das auf der linken Seite dieser Gleichung stehende Charakterensystem *nicht* singulär ist. Hingegen gehört der rechts in Klammern gesetzte Bruch zu X. Daß es nur $p - 1$ Prymsche Differentiale 1. Gattung gibt, ist demnach, wenn wir uns der Sprache des Umkehrproblems bedienen, dem Satze äquivalent:

Das singuläre Gebilde X geht niemals dadurch, daß man alle zu ihm gehörigen Charakterensysteme der Multiplikation mit einem festen Charakterensystem χ_S unterwirft, in sich über (vom trivialen Falle $\chi_S = 1$ natürlich abgesehen).

Dies mag genügen, um den Zusammenhang des Umkehrproblems mit der Theorie der multiplikativen Funktionen und Differentiale deutlich zu machen. *Analytisch* wird man die Auflösung des Jacobischen Problems in der Weise angreifen, daß man eine willkürliche, auf $\mathfrak{F}$ eindeutige, bis auf Pole reguläre Funktion $f(\mathfrak{p})$ zu Hilfe nimmt und dann statt der Punkte $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_p$ selbst *die Werte der Funktion f an den Stellen* $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_p$ aus (45) in ihrer Abhängigkeit von $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_p$ zu ermitteln sucht. Da diese Größen $f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2) \ldots, f(\mathfrak{p}_p)$ aber nur bis auf ihre Reihenfolge bestimmt sind, ersetzt man sie richtiger durch ihre *elementar-symmetrischen Funktionen*, d. h. durch die Koeffizienten derjenigen Gleichung p^{ten} Grades

$$\lambda^p + A_1 \lambda^{p-1} + \cdots + A_p = 0,$$

deren Wurzeln die Zahlen

$$\lambda = f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2), \ldots, f(\mathfrak{p}_p)$$

sind. Diese Koeffizienten A_h, ausgedrückt in $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \ldots, \mathcal{F}_p$, sind das, was man nach Jacobis Vorschlag **Abelsche Funktionen** nennt. Außer

1) Im Falle $p = 1$ ist X überhaupt nicht vorhanden (S. 127), im Falle $p = 2$ besteht es aus dem einzigen Charakterensystem χ_S^0.

für singuläre Wertsysteme $(\mathfrak{z}) = (\mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_p)$, die im gesamten $2p$-dimensionalen $\mathfrak{z}$-Raum nur ein Gebilde von $(2p - 4)$ Dimensionen ausmachen, sind die Abelschen Funktionen *eindeutig und regulär-analytisch*. Sie sind ferner $(2p)$-*fach periodisch*. Ist nämlich $\alpha_l [l = 1, 2, \ldots, 2p]$ eine Basis der geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$ und

$$a_h^l = \int_{\alpha_l} dw_h^*,$$

so bilden die Zahlen $a_1^l, a_2^l, \ldots, a_p^l$ für jeden Wert des Index l ein Periodensystem der Abelschen Funktionen $A((\mathfrak{z}))$:

$$A((\mathfrak{z} + a^l)) = A((\mathfrak{z})) \text{ identisch in } \mathfrak{z}_1, \mathfrak{z}_2, \ldots, \mathfrak{z}_p,$$

und diese $2p$ Periodensysteme sind in dem Sinne linear unabhängig, daß die Determinante, deren l^{te} Zeile =

$$\Re a_1^l, \ldots, \Re a_p^l, \Im a_1^l, \ldots, \Im a_p^l$$

ist, von 0 verschieden ausfällt. Führt man den Beweis, der hier für die Lösbarkeit des Umkehrproblems angegeben wurde, explizit durch, so gelangt man zu dem Resultat, daß sich eine Abelsche Funktion $A((\mathfrak{z}))$ *in jedem endlichen Stück des $\mathfrak{z}$-Raumes*

$$|\mathfrak{z}_1| < M, \ |\mathfrak{z}_2| < M, \ldots, |\mathfrak{z}_p| < M$$

als Quotient zweier Funktionen darstellen läßt, die in diesem endlichen Stück durchaus regulär-analytisch sind.[1]) Die Unbestimmtheit für die singulären Wertsysteme $(\mathfrak{z})$ kommt dadurch zustande, daß für diese Zähler und Nenner der erwähnten Darstellung beide verschwinden. Die von den Unbestimmtheitsstellen gebildete Punktmenge gestattet keine Verschiebungen in sich außer denjenigen, welche die Periodizität der Abelschen Funktionen als selbstverständlich mit sich bringt. — Darüber hinaus ist von Riemann und Weierstraß durch eine viel eindringendere Analyse gezeigt worden, daß die Abelschen Funktionen, auch ohne Einschränkung auf ein endliches Gebiet, sich als Quotienten von ganzen transzendenten Funktionen, eben der ϑ-Funktionen, darstellen lassen, und sie haben für die ϑ-Funktion einen expliziten analytischen Ausdruck in Form einer stark konvergenten unendlichen Reihe angegeben. Diese ϑ-Funktion reicht auch aus, um die allgemeine Theorie der $2p$-fach periodischen Funktionen von p unabhängigen komplexen Argumenten zu begründen, von der die Theorie der Abelschen Funktionen nur ein Sonderfall ist.[2]) —

Halten wir Rückschau auf die in diesem langen Paragraphen gewonnenen Erkenntnisse, so können wir uns vor allem der *Überzeugung*

1) Vgl. Weierstraß, Werke Bd. 4, S. 451—456.

2) Vgl. das vierte Kapitel in Krazers Lehrbuch der Thetafunktionen (Leipzig 1903), woselbst sich auch die weitere Literatur angegeben findet.

von der hohen funktionentheoretischen Bedeutung der Zahl p nicht verschließen; dennoch ist und bleibt diese Zahl ihrer Wurzel und ihrem Wesen nach eine *Analysis-situs-Größe*. Die überall durchschimmernden einfachen Grundlinien, von denen die in ihren Details verwickelte und nicht ganz leicht zu übersehende Rechtsordnung des funktionentheoretischen Staatswesens beherrscht wird, weisen eben alle wie auf eine unsichtbare, über der funktionentheoretischen Wirklichkeit schwebende „göttliche Gesetzgeberin" auf die Analysis situs zurück.

Was aber das eigentlich Funktionentheoretische angeht, so hatten wir es mit *zwei Gedankenkreisen* zu tun, die etwa durch die Schlagworte

additive Funktion, Partialbruchzerlegung, Riemann-Rochscher Satz —
multiplikative Funktion, Produktdarstellung, Abelsches Theorem

nochmals einander gegenübergestellt werden mögen. Diese beiden Gedankenkreise durchdringen sich in der *Theorie der eindeutigen Funktionen auf* $\mathfrak{F}$, deren Aufbau sich von hier aus mittels der in § 16 gewonnenen Reziprozitätsgesetze mühelos vollzieht. Die *Bedeutung* des so errichteten Gebäudes wird aber erst ins rechte Licht gesetzt, wenn wir das System der singularitätenfreien eindeutigen Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche, wie es im nächsten Paragraphen geschehen soll, noch von einem dritten Gesichtspunkte aus als *algebraischen Funktionenkörper* kennen lernen; denn erst auf diesem Standpunkt erscheinen jene Funktionen mit unsern sonstigen Interessen, den *algebraischen* und den *geometrischen* — soweit diese sich auf die Theorie der algebraischen Kurven in der Ebene und in höher dimensionierten Räumen beziehen — aufs engste verknüpft.

§ 18. Der algebraische Funktionenkörper.

z sei auf der gegebenen geschlossenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ eine Funktion, welche sich nicht auf eine Konstante reduziert, sondern jeden Wert n-mal annimmt. Man kann $\mathfrak{F}$ dadurch zu einer sich n-blättrig über der z-Kugel ausbreitenden Überlagerungsfläche machen, daß man von einem Punkte $\mathfrak{p}$ auf $\mathfrak{F}$, in welchem z den Wert a besitzt, sagt, er liege über dem Punkte $z = a$ der z-Kugel. Über denjenigen endlich vielen Werten a, für welche die n Punkte $\mathfrak{p}$, in denen z den Wert a annimmt, nicht alle voneinander verschieden sind, liegen allerdings weniger als n Punkte der Überlagerungsfläche. Nimmt an einer Stelle $\mathfrak{p}_0$ die Funktion z den endlichen Wert a r-mal an, so ist $\sqrt[r]{z - a}$ eine Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}_0$, der über a gelegene Punkt $\mathfrak{p}_0$ ist ein Verzweigungspunkt von der Ordnung $r - 1$. Ist $\mathfrak{U}$ irgendeine Umgebung von $\mathfrak{p}_0$, so gibt es einen Kreis $|z - a| \leq \varepsilon$ auf der z-Kugel, so daß über jedem Punkt dieses Kreises (außer über dem Mittelpunkt) genau r der Umgebung $\mathfrak{U}$ angehörige Punkte von $\mathfrak{F}$ liegen. dz hat in $\mathfrak{p}_0$ eine Nullstelle der $(r-1)$ten Ord-

nung. Nimmt z an der Stelle $\mathfrak{p}_0$ s-mal den Wert ∞ an, so ist $\sqrt[s]{\frac{1}{z}}$ eine Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}_0$, und wir haben einen Verzweigungspunkt der $(s-1)$ten Ordnung; dz besitzt in $\mathfrak{p}_0$ einen Pol der Ordnung $(s+1)$. Wir bezeichnen die Summe der Ordnungen aller Verzweigungspunkte auf der Fläche, ihre „**Verzweigungszahl**", mit V. Es ist

Anzahl der Nullstellen — Anzahl der Pole von $dz = \Sigma(r-1) - \Sigma(s+1)$,

wo die erste Summe rechts sich auf alle Punkte der Fläche bezieht, außer auf diejenigen, welche über $z = \infty$ liegen, während die zweite Summe gerade diese Punkte betrifft. Die rechte Seite der Gleichung ist

$$= \Sigma(r-1) + \underset{\infty}{\Sigma}(s-1) - 2 \cdot \underset{\infty}{\Sigma} s = V - 2n,$$

die linke Seite $= 2p - 2$, wir finden mithin:

$$V = 2(p + n - 1).$$

Diese Formel, welche zeigt, daß V stets gerade ist, und das Geschlecht der Fläche aus Blätteranzahl und Verzweigungszahl zu berechnen gestattet, kann auch rein analysis-situs-mäßig so bewiesen werden. Man trianguliert die z-Kugel in der Weise, daß $z = \infty$ und diejenigen Punkte, über denen Verzweigungspunkte liegen, sämtlich als Eckpunkte auftreten und auch immer nur über höchstens einem der drei Eckpunkte eines Dreieckes ein Verzweigungspunkt liegt. Durch Überlegungen ähnlicher Art wie in § 6 erkennt man, daß diese Triangulation sich auf die Fläche $\mathfrak{F}$, aufgefaßt als Überlagerungsfläche der z-Kugel, überträgt. Über jedem Elementardreieck der triangulierten Kugel liegen n Dreiecke von $\mathfrak{F}$, über jeder Kante der Kugel n Kanten von $\mathfrak{F}$. Für die Gesamtzahl D und K der Dreiecke und Kanten von $\mathfrak{F}$ haben wir demnach

$$D = nD_0, \quad K = nK_0,$$

wenn D_0, K_0, E_0 die Anzahlen der Dreiecke, Kanten und Ecken der triangulierten Kugel bedeuten. Liegen über einem Eckpunkt $z = a$ der Kugel h Punkte mit den Verzweigungsordnungen $r_1 - 1, \cdots, r_h - 1$, so gibt das

$$h = n - [(r_1 - 1) + \cdots + (r_h - 1)]$$

Eckpunkte auf $\mathfrak{F}$. Die Gesamtzahl der Eckpunkte auf $\mathfrak{F}$ beträgt mithin $E = nE_0 - V$. Da die Kugel einfach zusammenhängend ist, gilt nach der Eulerschen Polyederformel:

$$E_0 + D_0 - K_0 = 2.$$

Daher ist

$$K - E - D = n(K_0 - E_0 - D_0) + V = V - 2n,$$

und da

$$K - E - D + 2 = 2p$$

wird (§ 12), wie oben:

$$V = 2(p + n - 1).$$

Hieraus kann nun (umgekehrt, wie es im vorigen Absatz geschah), geschlossen werden, daß die Gesamtordnung von dz (und damit eines jeden Differentials auf der Fläche) $= V - 2n = 2p - 2$ ist.

Die Darstellung einer gegebenen Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ als Überlagerungsfläche über der z-Kugel kann auch dazu dienen, den einen Teil des *Abelschen Theorems*, welcher aussagt, daß die Bedingung

$$\sum_{k=1}^{n} w(\mathfrak{p}_k^0) = \sum_{k=1}^{n} w(\mathfrak{q}_k^0)$$

notwendig ist, damit

$$\frac{\mathfrak{p}_1^0 \mathfrak{p}_2^0 \cdots \mathfrak{p}_n^0}{\mathfrak{q}_1^0 \mathfrak{q}_2^0 \cdots \mathfrak{q}_n^0}$$

eine Funktion z auf der Fläche ist, sehr einfach zu beweisen. Sind nämlich allgemein $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \cdot\cdot, \mathfrak{p}_n$ die nach dieser Auffassung über dem Punkt z der z-Kugel gelegenen Punkte von $\mathfrak{F}$, so ist, wenn dw ein beliebiges Differential 1. Gattung auf $\mathfrak{F}$ ist, durch

$$\frac{dW}{dz} = \frac{dw(\mathfrak{p}_1)}{dz} + \frac{dw(\mathfrak{p}_2)}{dz} + \cdots + \frac{dw(\mathfrak{p}_n)}{dz}$$

ein überall reguläres Differential dW auf der z-Kugel gegeben, und ein solches ist nicht vorhanden außer: dW identisch $= 0$. Ziehen wir auf der z-Kugel irgendeine Kurve, z. B. einen Meridian, der vom Südpol $z = 0$ zum Nordpol $z = \infty$ führt, so bilden die darüberliegenden Punkte von $\mathfrak{F}$ (sich unter Umständen in Verzweigungspunkten treffende) Kurven $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$, und es folgt durch Integration von $dW = 0$:

$$\int_{\gamma_1} dw + \cdots + \int_{\gamma_n} dw = 0. \tag{49}$$

Diese Gleichung ist mit der im Abelschen Theorem ausgesprochenen notwendigen Bedingung gleichbedeutend. Zu der Einsicht, daß diese Bedingung hinreichend ist, gelangt man jedoch auf diesem Wege nicht; wohl aber hindert uns nichts, mit Abel das Differential 1. Gattung dw durch irgendein mit Polen versehenes, sonst aber reguläres Differential auf der Fläche zu ersetzen und für ein solches eine ähnliche Relation wie (49) abzuleiten. Wir gehen darauf jedoch nicht näher ein. —

z sei wiederum eine Funktion auf der Fläche $\mathfrak{F}$, welche jeden Wert $n$mal annimmt. *Ist dann f irgendeine Funktion auf der Fläche, so genügt f identisch einer Gleichung $n$ten Grades*

$$f^n + r_1(z) f^{n-1} + \cdots + r_{n-1}(z) f + r_n(z) = 0, \tag{50}$$

in der die $r_i(z)$ rationale Funktion von z sind. Das bedeutet: Ist $\mathfrak{p}_0$ irgendein Punkt auf $\mathfrak{F}$, t eine zugehörige Ortsuniformisierende und sind $z = z(t)$, $f = f(t)$ die nach ganzen Potenzen fortschreitenden Entwicklungen von z und f in der Umgebung von $\mathfrak{p}_0$, so geht die linke Seite von (50) iden-

tisch in 0 über, wenn man für z die Potenzreihe $z(t)$, für f die Potenzreihe $f(t)$ einsetzt. Um diese Gleichung (50) zu beweisen, schließen wir auf der z-Kugel zunächst den Punkt $z = \infty$ aus und diejenigen Punkte, über denen Verzweigungspunkte liegen oder Pole der Funktion f. Für jeden anderen z-Wert bilden wir die Zahl

$$r_1(z) = f(\mathfrak{p}_1) + f(\mathfrak{p}_2) + \cdots + f(\mathfrak{p}_n),$$

wo die Summe rechts sich auf die n über z gelegenen Punkte erstreckt. Von der Reihenfolge ihrer Numerierung ist sie unabhängig. Da wir diese Numerierung so einrichten können, daß in der Umgebung eines nicht ausgeschlossenen Punktes

$$z_0 : \mathfrak{p}_1^0, \mathfrak{p}_2^0, \cdots, \mathfrak{p}_n^0$$

$f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2), \cdots, f(\mathfrak{p}_n)$ Potenzreihen in $z - z_0$ werden, ist $r_1(z)$ eine in allen nicht ausgeschlossenen Punkten regulär-analytische Funktion. In den ausgeschlossenen Punkten kann diese Funktion keine wesentlich singulären Stellen, mithin nur Pole besitzen; daher ist sie eine rationale Funktion von z. Ebenso erkennt man, daß die übrigen elementarsymmetrischen Funktionen von $f(\mathfrak{p}_1), \cdots, f(\mathfrak{p}_n)$ sich rational durch z ausdrücken.

Liegen über z_0 die n verschiedenen Punkte $\mathfrak{p}_1^0, \cdots \mathfrak{p}_n^0$, so können wir die Funktion f so wählen, daß sie an diesen n Stellen voneinander verschiedene Werte besitzt. Ist $d\tau_k (k = 1, \cdots, n)$ ein Differential, das nur an der Stelle $\mathfrak{p}_k^0$ einen Pol und dort den Hauptteil $-\frac{dz}{(z-z_0)^2}$ besitzt, so kann man z. B.

$$f = (z - z_0)^2 \left(C_1 \frac{d\tau_1}{dz} + \cdots + C_n \frac{d\tau_n}{dz} \right)$$

setzen, indem man für $C_1, \cdots, C_n$ irgend n verschiedene Konstante wählt. Die Gleichung $n$ten Grades für f ist dann **irreduzibel**; d. h. ihre linke Seite, das Polynom $n$ten Grades der Variablen u

$$F_z(u) \equiv u^n + r_1(z) u^{n-1} + \cdots + r_n(z)$$

läßt sich nicht in zwei Polynome $F_z^{(1)}(u) \cdot F_z^{(2)}(u)$, deren Koeffizienten gleichfalls rationale Funktionen von z sind, zerspalten. Angenommen nämlich, dies wäre möglich; f läßt sich in der Umgebung von $\mathfrak{p}_1^0$ in eine Potenzreihe nach der zu $\mathfrak{p}_1^0$ gehörigen Ortsuniformisierenden $z - z_0$ entwickeln. Diese Potenzreihe möge, für u gesetzt, der Gleichung $F_z^{(1)}(u) = 0$ Genüge leisten. Verbinden wir $\mathfrak{p}_1^0$ mit irgendeinem der Punkte $\mathfrak{p}_k^0$ durch eine Kurve auf $\mathfrak{F}$, deren Spur auf der z-Kugel durch keinen der ausgeschlossenen Punkte hindurchgeht, so muß für alle Funktionselemente (z, f) längs dieser Kurve die Gleichung $F_z^{(1)}(u) = 0$ bestehen bleiben. Infolgedessen ist auch $f(\mathfrak{p}_k^0)$ eine Wurzel der Gleichung $F_{z_0}^{(1)}(u) = 0$; diese hat also n verschiedene Wurzeln und muß folglich vom Grade n

sein; $F_z^{(2)}(u)$ kann demnach in u nur vom 0ten Grade sein; und eine wirkliche Zerlegung von der vorausgesetzten Art kommt nicht zustande.

Zu jedem Punkte $\mathfrak{p}$ von $\mathfrak{F}$ gehört ein Funktionselement (z, f), das der Gleichung $F_z(u) = 0$ Genüge leistet. Für zwei verschiedene Punkte sind diese beiden Funktionselemente stets verschieden, und die zu allen Punkten $\mathfrak{p}$ gehörigen Elemente erschöpfen die Gesamtheit derjenigen, welche jene Gleichung befriedigen. Mit andern Worten: *Die Gesamtheit derjenigen Funktionselemente, welche der irreduziblen algebraischen Gleichung* $F_z(u) = 0$ *genügen, macht ein einziges analytisches Gebilde im Weierstraßschen Sinne aus. Dieses analytische Gebilde, als Riemannsche Fläche aufgefaßt, ist der gegebenen Riemannschen Fläche konform-äquivalent;* die gegebene Fläche ist die zu dem durch die Gleichung $F_z(u) = 0$ definierten algebraischen Gebilde gehörige Riemannsche Fläche.[1])

Jede bis auf Pole reguläre Funktion f^* auf der Fläche läßt sich rational durch f ausdrücken mit Koeffizienten, die rationale Funktionen von z sind:

$$f^* = R_0(z) + R_1(z)f + \cdots + R_{n-1}(z)f^{n-1},$$

und jede rational aus z und f gebildete Funktion ist auf der Fläche bis auf Pole regulär. Wenn man z als unabhängige Variable auffaßt, f als die durch die Gleichung $F_z(u) = 0$ definierte algebraische Funktion von z, so bilden diejenigen Funktionen, welche sich rational durch f ausdrücken lassen mit in z rationalen Koeffizienten, einen **algebraischen Funktionenkörper**. Unsere Behauptung läßt sich daher so aussprechen: *Faßt man die sämtlichen bis auf Pole regulären Funktionen auf einer geschlossenen Riemannschen Fläche als Funktionen einer beliebigen unter ihnen* (die nur keine bloße Konstante sein darf) *auf, so bilden sie einen algebraischen Funktionenkörper.*

Beweis: Bedeuten $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_n$ wieder die n über dem Punkte z der z-Kugel gelegenen Punkte von $\mathfrak{F}$, so bilden wir zu $\mathfrak{p}_1$ das Polynom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grades der Variablen u:

$$G_1(u) = \frac{(u - f(\mathfrak{p}_2))(u - f(\mathfrak{p}_3))\ldots(u - f(\mathfrak{p}_n))}{(f(\mathfrak{p}_1) - f(\mathfrak{p}_2))(f(\mathfrak{p}_1) - f(\mathfrak{p}_3))\ldots(f(\mathfrak{p}_1) - f(\mathfrak{p}_n))} = \frac{1}{[F_z'(u)]_{u=f(\mathfrak{p}_1)}} \cdot \frac{F_z(u)}{u - f(\mathfrak{p}_1)}$$

$$\left\{F_z'(u) = \frac{dF_z(u)}{du}\right\},$$

und die analogen Polynome $G_2(u), \ldots, G_n(u)$ zu den Punkten $\mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_n$. Dabei ist zunächst wieder die Stelle $z = \infty$ ausgeschlossen und diejenigen Stellen, über denen Verzweigungspunkte liegen oder Pole der Funktion f außerdem ist noch angenommen, daß die Werte $f(\mathfrak{p}_1), f(\mathfrak{p}_2), \ldots, f(\mathfrak{p}_n)$

1) Die Verallgemeinerung dieses Satzes auf beliebige (ungeschlossene) Flächen ist von P. Koebe, Comptes Rendus, 1. Juli 1909, bewiesen worden. Vgl. E. Freundlich, Funktionen mit vorgeschriebenem unendlichblättrigen Existenzbereich, Göttinger Dissertation 1910.

alle voneinander verschieden sind, daß z keine Nullstelle der Diskriminante des Polynoms $F_z(u)$ ist. Durch die gleiche Schlußweise wie oben findet man, daß die Koeffizienten des Polynoms

$$G_z(u) = f^*(\mathfrak{p}_1)G_1(u) + f^*(\mathfrak{p}_2)G_2(u) + \cdots + f^*(\mathfrak{p}_n)G_n(u)$$

(*Lagrangesche Interpolationsformel*) rationale Funktionen von z sind. Die Gleichung

$$f^*(\mathfrak{p}) = [G_z(u)]_{u=f(\mathfrak{p})}$$

ist dann eine Identität auf der Fläche.

Legt man statt z irgend eine andere Funktion auf der Fläche, $\bar{z}$, als unabhängige Variable zugrunde, so kann man dazu noch auf unendlich viele Weisen eine Funktion $\bar{f}$ auf der Fläche bestimmen, von solcher Art, daß alle Funktionen sich rational durch $\bar{z}$ und $\bar{f}$ ausdrücken lassen. Zwischen $\bar{z}$ und $\bar{f}$ besteht eine irreduzible algebraische Gleichung $\bar{F}_{\bar{z}}(\bar{f})=0$. $\bar{z}$ und $\bar{f}$ sind rationale Funktionen der durch die Gleichung $F_z(f) = 0$ verknüpften Variablen z, f; und umgekehrt sind z und f rationale Funktionen der durch die Gleichung $\bar{F}_{\bar{z}}(\bar{f}) = 0$ verknüpften Variablen $\bar{z}, \bar{f}$. Durch die **„birationale Transformation"** $(z, f) \rightleftarrows (\bar{z}, \bar{f})$ gehen die Gleichungen

$$F_z(u) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{F}_{\bar{z}}(\bar{u}) = 0$$

ineinander über. Der Grad dieser Gleichung ist natürlich keine Invariante gegenüber birationaler Transformation, wohl aber das Geschlecht p.

Gibt es auf $\mathfrak{F}$ eine Funktion z, die jeden Wert nur einmal annimmt, so ist der zugehörige algebraische Körper der Körper der rationalen Funktionen von z (und $p = 0$) Gibt es auf $\mathfrak{F}$ zwar keine Funktion, die jeden Wert nur einmal, wohl aber eine solche, z, die jeden Wert genau zweimal annimmt, so können wir die den zugehörigen Körper bestimmende algebraische Gleichung (die quadratisch sein muß) von der Form voraussetzen:

$$u^2 = (z - e_1)(z - e_2) \ldots (z - e_l),$$

wo die e_i alle untereinander verschieden sind. Diese l Punkte und, wenn l ungerade ist, auch noch der Punkt ∞ sind Verzweigungspunkte 1. Ordnung, und das Geschlecht p ist demnach $= \frac{l}{2} - 1$, wenn l gerade, $= \frac{l-1}{2}$, wenn l ungerade ist. Wir sehen: $l = 1$ oder $= 2$ führt noch wieder auf den rationalen Körper $p = 0$; $l = 3$ oder $= 4$ hat $p = 1$ zur Folge, das ist der elliptische Fall; wenn $l > 4$ ist, bekommen wir die sog. **hyperelliptischen** Funktionenkörper. — In einem beliebigen algebraischen Funktionenkörper vom Geschlechte $p = 1$ gibt es stets eine Funktion mit zwei vorgeschriebenen Polen, also eine Funktion, die jeden Wert nur zweimal annimmt; in jedem Funktionenkörper vom Geschlechte 2 erhalten wir eine Funktion der gleichen Art, indem wir zwei linear unab-

hängige Abelsche Differentiale 1. Gattung durcheinander dividieren. Erst von $p = 3$ ab ist der hyperelliptische Fall nicht mehr der allgemeine.[1])

Wenn man nicht, wie es hier geschehen ist, von der Riemannschen Fläche ausgeht, sondern von einer bestimmten algebraischen Gleichung $F_z(u) = 0$ (wie es in der Weierstraßschen und anderen Theorien geschieht), wird man es als eine naturgemäße Forderung betrachten können, alle diejenigen Funktionen und Differentiale, deren Existenz in den vorigen Abschnitten mit Hilfe des Dirichletschen Prinzipes erschlossen ist, auf rein algebraischem Wege als rationale Ausdrücke in z, f [die Differentiale in der Form $R(z, f)dz$] zu konstruieren. Sobald aber das Gegebene nicht eine algebraische Gleichung, sondern die Riemannsche Fläche ist, muß im Gegenteil der hier im Anschluß an Riemann besprochene funktionentheoretische Weg als der natürliche erscheinen. Wie wichtig auch jene algebraischen Konstruktionsprinzipien sein mögen, namentlich mit Rücksicht auf spezielle Anwendungen der Theorie, — man wird doch den Standpunkt Riemanns als den höheren bezeichnen dürfen, da von ihm aus ein umfassenderer und tieferer Einblick in die eigentümlichen Gesetze, welche dieses Gebiet mathematischer Erkenntnis beherrschen, möglich wird, als sich auf anderem Wege gewinnen läßt. Selbst wenn man den Weierstraßchen Begriffsbildungen folgt, wird man, wie ich schon früher erwähnte, die Auffassung des analytischen Gebildes als einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit nicht umgehen können, ohne den Dingen Gewalt anzutun, und es ist dann nur ein kleiner Schritt, die dieser Mannigfaltigkeit zukommenden Analysis-situs-Eigenschaften — deren tiefeinschneidende funktionentheoretische Bedeutung inzwischen zur Genüge hervorgetreten ist — allen anderen als die primitivsten voranzustellen. Darüber hinaus ist für die Riemannsche Art der Be-

1) Der Abriß der Theorie der algebraischen Funktionen, den wir hier geben konnten, ist nur unvollständig. Genaueres findet der Leser außer in den bereits zitierten Werken von Riemann, Weierstraß, Klein, C. Neumann, Stahl, Hensel-Landsberg noch in folgenden Darstellungen: Clebsch und Gordan, Theorie der Abelschen Funktionen, Leipzig 1866 (kurventheoretisch). Brill und Noether, Über die algebraischen Funktionen und ihre Anwendung in der Geometrie, Math. Ann. Bd. 7 (1874), S. 269—310 (kurventheoretisch); Die Entwicklung der Theorie der algebraischen Funktionen, Bericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 3, Berlin 1894. Dedekind und Weber, Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen, Crelles Journal Bd. 92 (1882), S. 181—290 (arithmetisch); auch dargestellt in Weber, Algebra, Bd. III, 2. Aufl., Braunschweig 1908, S. 623 ff. Klein-Fricke, Theorie der elliptischen Modulfunktionen (1890—92), Bd. I, Abschn. III, Kap. 1, 2, und Bd. II, Abschn. VI, Kap. 1. Klein, Riemannsche Flächen I, II, autographierte Vorlesungen, Göttingen 1892/93. Appell et Goursat, Théorie des fonctions algébriques, Paris 1895. Baker, Abels theorem and the allied theory incl. the theory of the Thetafunctions, Cambridge 1897. Fields, Theory of the algebraic functions of a complex variable, Berlin 1906. Stahl, Abriß einer Theorie der algebraischen Funktionen einer Veränderlichen in neuer Fassung (nachgelassene Schrift, herausgegeben von Löffler und Noether), Leipzig 1911.

handlung charakteristisch, daß in ihr überall nicht das analytische Gebilde, sondern die Riemannsche Fläche als das Gegebene angesehen wird, und die Konstruktion eines zugehörigen analytischen Gebildes gerade einen Hauptbestandteil der zu lösenden Probleme bildet. In der Riemannschen Darstellung selbst tritt dieser Standpunkt freilich noch nicht mit derjenigen vollständigen Klarheit hervor, mit der wir ihn jetzt an Hand der Arbeiten von Prym, Dedekind[1]), C. Neumann und namentlich von Klein herauspräparieren können.

Jede Riemannsche Fläche vom Geschlechte p kann man, wie wir sahen, darstellen als eine mehrblättrige Überlagerungsfläche über der Kugel (mit endlich vielen Verzweigungspunkten, aber ohne Grenzen). Diese „Normalform" läßt sich jedoch, selbst wenn man die Blätterzahl n durch die Bedingung $n = p + 1$ normiert (was immer zu erreichen ist), noch auf die mannigfachste Art herstellen. Eine sehr viel höhere prinzipielle Bedeutung kommt der im wesentlichen *eindeutig* bestimmten Normalform der Riemannschen Flächen von beliebigem Geschlechte zu, welche durch die Uniformisierungstheorie (Theorie der automorphen Funktionen) geliefert wird.

§ 19. Uniformisierung.

In der Theorie der Uniformisierung verwachsen die Weierstraßschen und Riemannschen Gedankenkreise zu einer vollständigen Einheit. Während bei Weierstraß das analytische Gebilde (z, u) *an jeder einzelnen Stelle* durch eine *besondere* Darstellung mit Hilfe eines Parameters t (der „Ortsuniformisierenden"): $z = z(t)$, $u = u(t)$ beschrieben wird, Riemann freilich eine *einheitliche* Darstellung $z = z(\mathfrak{p})$, $u = u(\mathfrak{p})$ des ganzen Gebildes gewinnt, dabei aber den Parameter $\mathfrak{p}$ als Punkt auf einer Riemannschen Fläche (nicht als komplexe Variable im gewöhnlichen Sinne) aufzufassen gezwungen ist, handelt es sich in der Uniformisierungstheorie darum, für ein analytisches Gebilde eine einheitliche Darstellung $z = z(t)$, $u = u(t)$ mit Hilfe eines in einem Gebiet der schlichten komplexen Ebene variierenden Parameters t, der **uniformisierenden Variablen,** herzustellen. Als eigentliche Begründer der *Theorie der automorphen Funktionen*, auf welche dieses Problem führt, sind F. Klein und H. Poincaré[2]) zu nennen, deren allgemeine Auffassungen und Resultate in der Literatur

1) Prym vertritt diesen Standpunkt in seinen Arbeiten von 1869 ab; von Dedekind kommt hier die auf S. 35 zitierte Arbeit über die elliptische Modulfunktion aus dem Jahre 1877 in Betracht.

2) Von Poincaré siehe außer zahlreichen Comptes-Rendus-Noten aus den Jahren 1881/82 namentlich die Abhandlungen in den Acta Mathematica, Bd. 1, 3, 4, 5 (1882/84); von Klein die Arbeiten in den Math. Ann., Bd. 19, 20, 21 (1882/83), ferner die vor kurzem zum Abschluß gekommene umfassende Darstellung: Fricke u. Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig 1897—1912.

vorbereitet erscheinen durch wichtige, wenn auch speziellere Untersuchungen namentlich von Riemann, Schwarz, Fuchs, Dedekind, Klein und Schottky. Der Beweis für die Möglichkeit der Uniformisierung ist auf Grund der Idee der Überlagerungsfläche vollständig erst in neuester Zeit (1907) von P. Koebe und H. Poincaré geliefert worden.[1]) Klein, Poincaré und Koebe ist es vor allem zu verdanken, wenn heute die Theorie der Uniformisierung, welche innerhalb der komplexen Funktionentheorie eine zentrale Stellung beanspruchen darf, als ein mathematisches Gebäude von besonderer Harmonie und Großzügigkeit vor uns steht.[2]) — Der Grundgedanke des im folgenden geführten Beweises, aus dem *Dirichletschen Prinzip* die Existenz der uniformisierenden Variablen zu erschließen, rührt von Hilbert her.[3])

Die Uniformisierende t, welche wir suchen, soll so beschaffen sein, daß sie sich an jeder Stelle der gegebenen Fläche $\mathfrak{F}$ als Ortsuniformisierende eignet. Sie wird daher eine eindeutige, von Polen 1. Ordnung abgesehen, regulär-analytische Funktion auf der universellen Überlagerungsfläche $\widetilde{\mathfrak{F}}$ sein müssen. Suchen wir dasjenige t, welchem die stärkste uniformisierende Kraft zukommt, so werden wir t derart zu bestimmen suchen, daß es an zwei verschiedenen Stellen der Fläche $\widetilde{\mathfrak{F}}$ niemals denselben Wert annimmt, also $\widetilde{\mathfrak{F}}$ umkehrbar eindeutig und konform auf ein Gebiet der t-Kugel abbildet. Dann werden nicht nur die Funktionen auf der Grundfläche $\mathfrak{F}$ sich als eindeutige Funktionen von t darstellen lassen, sondern die viel umfassendere Gesamtheit derjenigen (auf $\mathfrak{F}$ im allgemeinen unendlich vieldeutigen) Funktionen, welche aus einem Funktionselement auf $\mathfrak{F}$ entstehen, das sich ohne Verzweigung und unbegrenzt auf allen Wegen in $\mathfrak{F}$ fortsetzen läßt. Und da $\widetilde{\mathfrak{F}}$ (im Gegensatz zu $\mathfrak{F}$) einfach zusammenhängend ist, widerstreitet die Möglichkeit einer solchen Abbildung nicht den Analysis-situs-Eigenschaften von $\widetilde{\mathfrak{F}}$. Die in den vorigen Paragraphen zugrunde gelegte Voraussetzung, daß $\mathfrak{F}$ geschlossen ist, können wir jetzt gern fallen lassen, da sie für die Uniformisierungstheorie in keinerlei Hinsicht eine Vereinfachung mit sich bringt.

1) Poincaré, Acta Mathematica Bd. 31 (1908), S. 1—63; Koebe, Nachrichten der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1907, S. 191—210 und S. 633—669.

2) Vgl. die Zusammenstellung der neueren Literatur bei Koebe, Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven, I [Math. Ann. Bd. 67, 1909, S. 146 bis 149], II [Math. Ann. Bd. 69, 1910, S. 2—3] und III [Math. Ann. Bd. 72, 1912, S. 438—439]; ferner Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven I [Crelles Journal Bd. 138, 1910, S. 195] und II [Crelles Journal Bd. 139, 1911, S. 251 ff.]. Zu einer allgemeinen Orientierung über die Resultate und Probleme dieses Teiles der Funktionentheorie dient vorzüglich das Referat über die Karlsruher Verhandlungen (1911) im Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung Bd. 21, 1912, S. 153—166.

3) Zur Theorie der konformen Abbildung, Göttinger Nachrichten, 1909, S. 314 bis 323.

Wir erhalten die gesuchte Uniformisierende einfach dadurch, daß wir das Dirichletsche Prinzip nicht auf $\mathfrak{F}$, sondern auf die Überlagerungsfläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ anwenden. Wir wählen auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ einen Punkt O mit der Ortsuniformisierenden z_0 und konstruieren mit Hilfe des Dirichletschen Prinzipes diejenige auf ganz $\tilde{\mathfrak{F}}$ abgesehen vom Punkte O reguläre Potentialfunktion U, welche sich in O verhält wie $\mathfrak{R}\frac{1}{z_0}$ und welche die Eigenschaft besitzt, daß

1. das über die ganze Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit Ausschluß eines beliebig kleinen z_0-Kreises um O erstreckte Dirichletsche Integral von U endlich ist,

2. für jede stetig differentiierbare Funktion w auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit endlichem Dirichletschen Integral, die in der Umgebung von O verschwindet, die Variation

$$\mathbf{D}(U, w) = 0$$

wird.

U gibt zu einem Differential $d\tau$ auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ Veranlassung, und dieses muß, da $\tilde{\mathfrak{F}}$ einfach zusammenhängend ist, das Differential einer bestimmten Funktion

$$\tau = U + iV$$

sein, deren Realteil mit U übereinstimmt und die überall, abgesehen vom Punkte O, regulär analytisch ist, in O aber einen Pol 1. Ordnung besitzt. τ ist dann eine uniformisierende Variable, wie wir sie suchen. Der Nachweis dieser Tatsache gelingt in sehr eleganter Weise mit Hilfe der folgenden, von Herrn Koebe herrührenden Deduktion.[1])

Wir zeigen zunächst:

Ist V_0 irgend eine reelle Konstante, so bilden diejenigen Punkte auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, in denen $V > V_0$ ist, ein einziges Gebiet, ebenso diejenigen, in denen $V < V_0$ ist.

Für O ist $\frac{1}{\tau}$ eine Ortsuniformisierende, und es sei $K_0 : \left|\frac{1}{\tau}\right| \leqq a_0$ ein $\frac{1}{\tau}$-Kreis um O. Ist $\mathfrak{C}(V_0)$ diejenige abgeschlossene Menge auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, die aus allen Punkten besteht, in denen $V = V_0$ ist, so haben gewiß nur zwei der durch $\mathfrak{C}(V_0)$ bestimmten Gebiete Punkte in K_0 liegen. Würde unsere Behauptung also falsch sein, so gäbe es unter den durch $\mathfrak{C}(V_0)$ bestimmten Gebieten eines, es heiße $\mathfrak{G}$, das nicht in die Umgebung K_0 von O eindringt. Es seien jetzt $\varphi(u)$, $\psi(u)$ irgend zwei für alle reellen u-Werte definierte stetige und stetig differentiierbare Funktionen. Wir bilden die folgende Funktion w auf der Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$:

1) Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Nachrichten der K. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen 1910, S. 61—65.

$$w = \begin{cases} \varphi(U)\psi(V) & \text{für alle Punkte innerhalb } \mathfrak{G} \\ 0 & \text{für alle nicht zu } \mathfrak{G} \text{ gehörigen Punkte.} \end{cases}$$

Sie wird überall stetig differentiierbar sein, wenn

$$\psi(V_0) = 0, \qquad \psi'(V_0) = 0 \qquad \left[\psi' = \frac{d\psi}{du}\right]$$

ist. In der Umgebung K_0 von O verschwindet w identisch. Ist $\mathfrak{p}$ irgend ein Punkt in $\mathfrak{G}$ und $z = x + iy$ eine Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}$, so ist

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \varphi'(U)\psi(V)\frac{\partial U}{\partial x} + \varphi(U)\psi'(V)\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= \varphi'(U)\psi(V)\frac{\partial U}{\partial x} - \varphi(U)\psi'(V)\frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \varphi'(U)\psi(V)\frac{\partial U}{\partial y} + \varphi(U)\psi'(V)\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Wenn φ, ψ, φ', ψ' beschränkte Funktionen sind, wird also das über ganz $\widetilde{\mathfrak{F}}$ erstreckte Dirichletsche Integral von w endlich sein. Unter den angegebenen Voraussetzungen müßte daher $\mathbf{D}(U, w) = 0$ werden. Nun ist:

$$\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi'(U)\psi(V)\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2\right].$$

Sorgen wir also dafür, daß φ', ψ für alle Werte ihres Arguments (ψ außer für $u = V_0$) positiv sind, so kommen wir zu einem Widerspruch.[1])

Aus der damit bewiesenen Tatsache und dem Umstande, daß $\widetilde{\mathfrak{F}}$ einfach zusammenhängend ist, kann man folgende Schlüsse über das Verhalten von τ ziehen:

1. *$d\tau$ hat nirgends eine Nullstelle.* Würde nämlich an einer Stelle $\mathfrak{p}_0$ von $\widetilde{\mathfrak{F}}$, wo τ den Wert τ_0 besitzt, $d\tau = 0$ sein, so wäre nicht $\tau - \tau_0$, sondern $\sqrt[r]{\tau - \tau_0}$ (r ganz und ≥ 2) Ortsuniformisierende zu $\mathfrak{p}_0$; nehmen wir an, es wäre $r = 2$ (für höhere r verläuft der Beweis analog). Ich setze $\tau - \tau_0 = \sigma^2$ und zeichne in der komplexen σ-Ebene einen Kreis K mit dem Mittelpunkt $\sigma = 0$, so klein, daß er als das durch die Funktion σ erzeugte konforme Abbild einer gewissen Umgebung des Punktes $\mathfrak{p}_0$ auf $\widetilde{\mathfrak{F}}$ erscheint. Ich nehme vier in K gelegene Punkte $\mathfrak{p}_1\,\mathfrak{p}_2$, $\mathfrak{q}_1\,\mathfrak{q}_2$ an, wie es Figur 24 andeutet, die über Kreuz durch zwei geradlinige, sich im Nullpunkte schneidende Strecken α, β verbunden sind. In $\mathfrak{p}_1$ und

1) Einen allen gestellten Forderungen genügenden Ansatz erhalten wir z. B., wenn wir mit Hilfe der Funktionen

$$\alpha(u) = \operatorname{arctg} u \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \alpha(u) < \frac{\pi}{2}\right), \qquad \beta(u) = \frac{u^2}{1+u^2};$$

$$\varphi(u) = \alpha(u), \qquad \psi(u) = \beta(u - V_0)$$

bilden.

$\mathfrak{p}_2$ ist $V > V_0$, in $\mathfrak{q}_1, \mathfrak{q}_2$ hingegen $V < V_0$. Diese Figur denke ich mir auf die Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, die in bestimmter Weise trianguliert sei, übertragen[1]); dann kann ich $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2$ durch einen Streckenzug α' verbinden, in dessen sämtlichen Punkten $V > V_0$ ist, ebenso $\mathfrak{q}_1 \mathfrak{q}_2$ durch einen Streckenzug β', in dessen sämtlichen Punkten $V < V_0$ ist.[2]) Die beiden geschlossenen Kurven $\alpha + \alpha'$, $\beta + \beta'$ schneiden sich nur im Punkte $\mathfrak{p}_0$, und es geht daraus, genau wie auf S. 46, hervor, daß $\beta + \beta'$ die Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ nicht zerlegt. Kreuze ich eine zu β' gehörige Strecke durch eine Elementarstrecke α^*, so kann ich deren Endpunkte durch einen Streckenzug miteinander verbinden, der $\beta + \beta'$ nirgends trifft. Dieser bildet mit α^* zusammen ein Polygon, das $\tilde{\mathfrak{F}}$ unzerlegt läßt. Ein solches Polygon kann aber nicht existieren, weil $\tilde{\mathfrak{F}}$ einfach zusammenhängend ist.

Fig. 24.

2. Dadurch, daß ich von einem Punkte der Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$, in welchem τ den Wert τ_0 besitzt, sage, er liege über dem Punkte τ_0 der τ-Kugel, wird $\tilde{\mathfrak{F}}$ zu einer Überlagerungsfläche $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ über der τ-Kugel oder der τ-Ebene. Diese ist nach dem, was soeben unter 1. bewiesen wurde, unverzweigt. Über $\tau = \infty$ liegt der einzige Punkt O. Ich verfolge die Linie $V = V_0$, von $\tau = \infty$ ausgehend, in der τ-Ebene in der Richtung von kleineren zu größeren U-Werten und auf $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ einen von O ausgehenden, stetig sich bewegenden Punkt $\tilde{\mathfrak{p}}$, der immer über dem diese Linie in der τ-Ebene beschreibenden Punkt bleibt. Stoße ich vor der Rückkehr nach ∞ auf keine Grenze, so beschreibt $\tilde{\mathfrak{p}}$, da über ∞ nur der eine Punkt O liegt, eine geschlossene Kurve $\tilde{\gamma}$, die die Linie $V = V_0$ der τ-Ebene einfach überdeckt. Stoße ich jedoch auf eine Grenze, so erhalte ich eine Linie $\tilde{\gamma}_1$ auf $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$, die ein gewisses Stück $U < U_1$ der Geraden $V = V_0$ *einfach* überdeckt. Dann verfolge ich die Gerade $V = V_0$ noch von größeren zu kleineren Werten von U fortschreitend und erhalte auf $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$ eine Linie $\tilde{\gamma}_2$, die ein Stück $U > U_2$ dieser Geraden einfach überdeckt. $\tilde{\gamma}_1 + \tilde{\gamma}_2$ bilden zusammen eine durch O hindurchgehende ungeschlossene Kurve $\tilde{\gamma}$ ohne Ende auf $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$.[3]) In jedem der beiden Fälle zerlegt die Linie $\tilde{\gamma}$ die Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}_\tau$, da diese einfach zu-

1) Auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ darf ich alsdann α, β nicht mehr als „Strecken" bezeichnen.

2) Natürlich kann ich voraussetzen, daß β' mit β außer den beiden Endpunkten keine weiteren Punkte gemein hat; vgl. S. 46.

3) Eine **Kurve ohne Ende** hat eine Darstellung

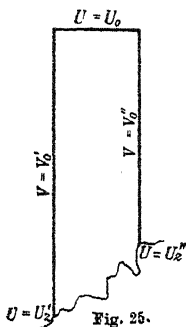
$$\tilde{\mathfrak{p}} = \tilde{\mathfrak{p}}(\lambda) \quad [0 < \lambda < 1],$$

und die zu ihr gehörigen Punkte $\tilde{\mathfrak{p}}$ bilden, trotzdem den Parameterwerten $\lambda = 0$ und $\lambda = 1$ *kein* Kurvenpunkt entspricht, eine *abgeschlossene* Menge.

sammenhängend ist, in zwei Gebiete $\mathfrak{G}'$, $\mathfrak{G}''$. Würde es noch Punkte auf $\tilde{\mathfrak{F}}$, in denen $V = V_0$ ist, außer auf $\tilde{\gamma}$, etwa in $\mathfrak{G}'$ geben, so würde es in $\mathfrak{G}'$ sowohl Punkte geben, in denen $V < V_0$, als solche, in denen $V > V_0$ wäre. Die Punktmenge $\mathfrak{E}(V_0)$ müßte demnach mindestens drei Gebiete bestimmen. Mit der Linie $\tilde{\gamma}$ sind daher die Punkte, in denen $V = V_0$ ist, erschöpft. *$\tilde{\mathfrak{F}}$ ist als Überlagerungsfläche der τ-Kugel also überall höchstens zweiblättrig. Ein Wert $U_0 + iV_0$ wird auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ sicher dann einmal und nur einmal angenommen, wenn $V = V_0$ auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ eine geschlossene Linie ist.*

Wir wollen noch genau nachweisen, daß $\tilde{\gamma}$ die Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ stets zerlegen muß. Wenn das nämlich nicht der Fall ist, konstruieren wir eine zweiblättrige unverzweigte unbegrenzte Überlagerungsfläche über $\tilde{\mathfrak{F}}$, die wir dadurch erhalten, daß wir $\tilde{\mathfrak{F}}$ längs $\tilde{\gamma}$ aufschneiden, uns die so zerschnittene Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ in zwei Exemplaren herstellen und deren Schnittränder über Kreuz aneinanderheften. Abstrakter ausgedrückt heißt das (vgl. die analoge Konstruktion auf S. 31f.): Jedem Punkt $\tilde{\mathfrak{p}}$ von $\tilde{\mathfrak{F}}$ ordnen wir zwei „darüber gelegene" Punkte $\tilde{\mathfrak{p}}^1$, $\tilde{\mathfrak{p}}^2$ zu. Ist $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ ein nicht auf $\tilde{\gamma}$ gelegener Punkt, $\tau_0 = \tau(\tilde{\mathfrak{p}}_0)$, K ein beliebiger $(\tau - \tau_0)$-Kreis, der keinen Punkt von $\tilde{\gamma}$ enthält, so bilden diejenigen Punkte $\tilde{\mathfrak{p}}^1$ (mit dem oberen Index 1), welche über den im Innern von K gelegenen Punkten $\tilde{\mathfrak{p}}$ liegen, eine „Umgebung" von $\tilde{\mathfrak{p}}_0^1$, diejenigen Punkte $\tilde{\mathfrak{p}}^2$, welche über den gleichen Punkten $\tilde{\mathfrak{p}}$ liegen, eine „Umgebung" von $\tilde{\mathfrak{p}}_0^2$. Liegt hingegen $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ auf $\tilde{\gamma}$, so bedeute K einen beliebigen $(\tau - \tau_0)$-Kreis. Diejenigen Punkte $\tilde{\mathfrak{p}}^1$, deren Spurpunkte $\tilde{\mathfrak{p}}$ innerhalb K liegen und der Bedingung $V \geqq V_0$ genügen, sollen zusammen mit allen Punkten $\tilde{\mathfrak{p}}^2$, welche über den der Bedingung $V < V_0$ genügenden inneren Punkten $\tilde{\mathfrak{p}}$ von K liegen, eine „Umgebung" von $\tilde{\mathfrak{p}}_0^1$ bilden, und analog werde die Umgebung von $\tilde{\mathfrak{p}}_0^2$ erklärt. Da im letzten Falle alle in K gelegenen Punkte, in denen $V = V_0$ ist, gewiß zu $\tilde{\gamma}$ gehören, ist diese Definition des Begriffs der Umgebung im Einklang mit allen an eine solche Definition zu stellenden Forderungen. Wenn $\tilde{\gamma}$ nicht zerlegt, so ist klar, daß die eben erklärte Mannigfaltigkeit auch der Bedingung genügt, daß sich irgend zwei ihrer Punkte durch eine stetige Kurve verbinden lassen. Die Existenz einer solchen Überlagerungsfläche widerspricht aber der Tatsache, daß $\tilde{\mathfrak{F}}$ einfach zusammenhängend ist.

Fig. 25.

Der letzte Schritt des Beweises besteht in dem Nachweis des Satzes, daß *es höchstens eine einzige reelle Zahl V_0 geben kann, für welche die zugehörige Linie $V = V_0$ auf $\tilde{\mathfrak{F}}$ ungeschlossen ist.* Gäbe es nämlich zwei solche Linien $\tilde{\gamma}'$, $\tilde{\gamma}''$: $V = V_0'$, bzw. $V = V_0''$, so nehme man noch eine ganz in K_0 verlaufende *geschlossene* Linie $U \quad U_0$ zu Hilfe (ein so großer positiver Wert werde

für die Konstante U_0 genommen). $U > U_2'$ sei das eine Stück $\tilde{\gamma}_2'$ der Kurve $\tilde{\gamma}'$; $U > U_2''$ das Stück $\tilde{\gamma}_2''$ von $\tilde{\gamma}''$. Über der in Figur 25 stark ausgezogenen Linie der τ-Ebene liegt eine sie einfach bedeckende Kurve ohne Ende auf $\widetilde{\mathfrak{F}}_\tau$. Diese zerlegt $\widetilde{\mathfrak{F}}$ wegen des einfachen Zusammenhangs in zwei Gebiete, und $\mathfrak{G}$ sei dasjenige der beiden Gebiete, welches den Punkt O nicht enthält. Wir setzen wieder

$$w = \begin{cases} \varphi(U)\psi(V) & \text{innerhalb } \mathfrak{G} \\ 0 & \text{außerhalb } \mathfrak{G} \end{cases}$$

Damit diese Funktion auf $\widetilde{\mathfrak{F}}$ stetig differentiierbar ist, muß

$$\varphi(U_0) = \varphi'(U_0) = 0, \quad \begin{matrix} \psi(V_0') = \psi'(V_0') = 0 \\ \psi(V_0'') = \psi'(V_0'') = 0 \end{matrix}$$

sein. φ, φ', ψ, ψ' seien beschränkt und φ' außer für $u = U_0$, ψ außer für $u = V_0'$ und $u = V_0''$ positiv.[1]) Dann kommt ein Widerspruch gegen die Gleichung $\mathbf{D}(U, w) = 0$ zustande. Damit ist bewiesen:

τ bildet die Fläche $\widetilde{\mathfrak{F}}$ umkehrbar eindeutig und konform ab entweder auf die Vollkugel (1. Fall)

oder

auf die Kugel mit Ausnahme eines Punktes τ_0 (2. Fall)

oder

auf die Kugel mit Ausnahme eines Schlitzes $V = V_0$, $U_1 \leqq U \leqq U_2$ (3. Fall).

Wir ersetzen τ durch eine etwas andere Uniformisierende t. Im ersten Falle freilich soll $\tau = t$ sein. Im zweiten sorgen wir dafür, daß der eine Punkt der Kugel, welcher ausgelassen wird, der unendlich ferne ist; man setze also $t = \frac{1}{\tau - \tau_0}$; t bildet die Überlagerungsfläche ab auf die ganze Ebene (ohne den unendlich fernen Punkt). Im dritten Falle können wir zunächst durch eine ganze lineare Transformation erreichen, daß der Schlitz durch

$$V = 0, \qquad -1 \leqq U \leqq +1$$

gegeben ist; mit Hilfe der Formel

$$\tau = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$$

wird dann die geschlitzte τ-Kugel konform auf des Innere des Einheitskreises $|t| < 1$ der t-Ebene abgebildet.

Die geschilderte Konstruktion der Uniformisierenden t geschieht in zwei deutlich getrennten Schritten. Zunächst löst die Fläche $\widetilde{\mathfrak{F}}$ das Pro-

---

1) Allen Anforderungen wird genügt durch [vgl. Fußnote zu S. 144]:
$$\varphi = \alpha(u - U_0) \cdot \beta(u - U_0), \quad \psi = \beta(u - V_0') \cdot \beta(u - V_0'').$$

blem, soweit es der Analysis situs angehört, und darauf liefert der funktionentheoretische Satz, daß *sich jede einfach zusammenhängende Fläche auf ein Gebiet der Kugel konform abbilden läßt* (wenn man diesen Satz auf $\overline{\mathfrak{F}}$ anwendet) die Uniformisierende. Durch eine geringe Modifikation des Gedankenganges kann man zeigen, daß auch jede *schlichtartige* Fläche konform auf ein Gebiet der Kugel abgebildet werden kann[1]; für nichtschlichtartige Flächen ist dies jedoch aus Analysis-situs-Gründen ausgeschlossen: es kann dann nicht einmal eine umkehrbar eindeutige und *gebietsstetige* Abbildung auf ein Gebiet der Kugel stattfinden. Jede zu $\mathfrak{F}$ gehörige (relativ zu $\mathfrak{F}$ unverzweigte) Uniformisierende wird eine gewisse unverzweigte unbegrenzte schlichtartige Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{F}$ konform auf ein ebenes Gebiet abbilden. Man rechnet zwei Uniformisierende, welche dieselbe Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ auf ein Teilgebiet der Ebene abbilden, zur selben **Klasse** $\{\overline{\mathfrak{F}}\}$. Die Aufstellung aller Uniformisierenden erfordert dann die Lösung zweier Probleme:

1. des Analysis-situs-Problems: zu einer gegebenen Fläche alle unverzweigten unbegrenzten schlichtartigen Überlagerungsflächen $\overline{\mathfrak{F}}$ zu finden;

2. des Problems der konformen Abbildung: eine schlichtartige Fläche $\overline{\mathfrak{F}}$ auf jede mögliche Weise auf ein ebenes Gebiet konform abzubilden.

Daß das letzte immer auf wenigstens eine (und damit auch auf unendlich viele) Arten möglich ist, daß also jede der Analysis-situs-Bedingung der Schlichtartigkeit nach möglichen Klasse $\{\overline{\mathfrak{F}}\}$ von Uniformisierenden funktionentheoretisch wirklich vorhandene Uniformisierende enthält, ist der Inhalt des *allgemeinen Koebeschen Uniformisierungsprinzips.*[2]) Dieses trägt allerdings insofern noch weiter, als es außer den relativ zu $\mathfrak{F}$ unverzweigten auch noch die ganze Fülle der verzweigten Uniformisierenden mitumfaßt. Ohne Frage kommt aber unter allen möglichen Uniformisierenden der oben aufgestellten, mit t bezeichneten, die *größte* prinzipielle Bedeutung zu.

§ 20. Riemannsche Flächen und Nicht-Euklidische Bewegungsgruppen. Fundamentalbereiche. Poincarésche Θ-Reihen.

In welchem Maße ist die Uniformisierende t durch ihre am Schluß des vorigen Paragraphen erwähnten Eigenschaften festgelegt, d. h. in wie mannigfaltiger Weise kann man die Fläche $\mathfrak{F}$ konform abbilden auf die

---

1) Koebe, Über die Hilbertsche Uniformisierungsmethode, Göttinger Nachrichten 1910, S. 67—74.

2) Siehe namentlich P. Koebe, Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Erster Teil: Das allgemeine Uniformisierungsprinzip, Crelles Journal Bd. 138 (1910), S. 192—253.

Kugel, die Ebene oder das Innere des Einheitskreises? Diese Frage kommt offenbar darauf hinaus: in wie mannigfaltiger Weise kann man Kugel, Ebene oder Kreisinneres konform auf einen dieser drei Bereiche selbst abbilden? Da ist zunächst klar: die Kugel läßt sich schon wegen ihrer Geschlossenheit weder auf die Ebene noch das Kreisinnere abbilden. Aber auch eine konforme Abbildung der Ebene auf das Kreisinnere ist unmöglich; eine Funktion $t^*(t)$, welche die t-Ebene konform in das Innere des Einheitskreises der t^*-Ebene transformierte, wäre nämlich eine ganze transzendente Funktion, deren absoluter Betrag für alle Werte des Arguments unter der Grenze 1 bliebe, und eine solche ist nach dem Liouvilleschen Satze nicht vorhanden (außer der Konstanten, die hier ganz sinnlos ist). Weiterhin bestehen nun folgende einfachen Sätze:

(Fall 1.) *Die sämtlichen konformen Abbildungen der* (in der gewöhnlichen Weise durch eine komplexe Variable dargestellten) *Kuge auf sich selbst werden durch die linearen Transformationen geliefert.*

(Fall 2.) *Die komplexe Ebene läßt sich nur durch eine ganze lineare Transformation konform auf sich selbst abbilden.*

(Fall 3.) *Das Innere des Einheitskreises kann gleichfalls nur durch lineare Transformationen in sich selbst konform abgebildet werden.*

Fall 1. Wir haben nur zu zeigen: Wird die t-Kugel konform so auf die t^*-Kugel abgebildet, $t^* = t^*(t)$, daß $t = 0$ in $t^* = 0$, $t = \infty$ in $t^* = \infty$ übergeht, so muß $t^* = ct$ sein (c konstant). In der Tat ist dann $\frac{1}{t^*}$ im Nordpol der t-Kugel ($t = \infty$) regulär und hat dort eine Nullstelle, also ist auch $\frac{t}{t^*}$ daselbst noch regulär. t^* wird nur 0 für $t = 0$ und zwar von 1. Ordnung, da die Beziehung $t \longrightarrow t^*$ umkehrbar eindeutig ist; demnach ist $\frac{t}{t^*}$ auf der ganzen t-Kugel regulär, und also eine Konstante.

Fall 2. Wieder können wir annehmen, daß $t = 0$ in $t^* = 0$ abgebildet wird. Man hat dann zunächst zu beweisen, daß

$$\lim \frac{1}{t^*} = 0 \quad \text{ist für} \quad \lim \frac{1}{t} = 0. \tag{51}$$

Dem Kreise $|t^*| = R^*$ entspricht in der t-Ebene eine geschlossene Kurve $\mathfrak{C}$; R_0 sei die größte Entfernung eines Punktes auf $\mathfrak{C}$ vom Nullpunkte, R eine beliebige Zahl $> R_0$. In dem Kreis $|t| \leq R$ nimmt $|t^*|$ sein Maximum, das $> R^*$ sein muß, am Rande an, etwa für $t = t_0$. Da die Bildkurve $\mathfrak{R}^*$ des Kreises $|t| = R$ in der t^*-Ebene den Kreis $|t^*| = R^*$ nicht treffen kann

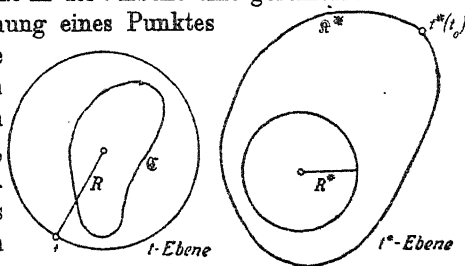



Fig. 26.

— denn der Kreis $|t| = R$ und die Kurve $\mathfrak{C}$, von der jene beiden Kurven die Bilder sind, treffen sich nicht in der t-Ebene — und da der Punkt $t^*(t_0)$ auf $\mathfrak{K}^*$ einen absoluten Betrag $> R^*$ besitzt, muß für alle Punkte auf $\mathfrak{K}^*$: $|t^*| > R^*$ sein; d. h. sobald $|t| > R_0$ ist, ist $|t^*| > R^*$; das ist die Behauptung (51). $\frac{1}{t^*(t)}$ ist demnach im Nordpol der t-Kugel regulär und hat dort eine Nullstelle, und man kann genau wie im Falle 1 weiterschließen.

Den Fall 3 erledigen wir mit Hilfe des sog. Schwarzschen Lemmas.[1]) Wieder können wir voraussetzen, daß $t = 0$ in $t^* = 0$ übergeht. Betrachte ich die reguläre Funktion $\frac{t^*}{t}$ im Kreise $|t| \leqq q (< 1)$, so muß ihr absoluter Betrag sein Maximum am Rande erreichen und ist daher $< \frac{1}{q} (|t^*| < 1, |t| = q)$. Da ich q so nahe an 1 wählen kann, wie ich will, muß für alle t im Innern des Einheitskreises $\left|\frac{t^*}{t}\right| \leqq 1$ sein. Ebenso ergibt sich $\left|\frac{t}{t^*}\right| \leqq 1$, folglich $\left|\frac{t^*}{t}\right| = 1$. Diese Relation ist nur dadurch möglich, daß $\frac{t^*}{t}$ eine Konstante vom absoluten Betrage 1 ist.

Damit sind die aufgestellten Behauptungen erwiesen: *die Ortsuniformisierende t ist jedenfalls stets bis auf eine lineare Transformation eindeutig bestimmt.* Die linearen Transformationen, welche das Innere des Einheitskreises in sich überführen, haben die Gestalt:

$$(52) \qquad t^* = \frac{(a + ib)t + (c - id)}{(c + id)t + (a - ib)}$$

$$\{a, b, c, d \text{ reell; Determinante } (a^2 + b^2) - (c^2 + d^2) = 1\}.$$

Insbesondere ergibt sich, da die Decktransformationen von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ umkehrbar eindeutige konforme Abbildungen von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ auf sich selber sind, daß sich diese Decktransformationen in der t-Ebene abbilden müssen als lineare Transformationen. Der Gruppe der Decktransformationen entspricht so eine gewisse ihr isomorphe Gruppe Γ linearer Transformationen. Keine der Gruppe Γ angehörige Transformation (außer der Identität) darf im Bildbereich (Kugel, Ebene oder Kreisinneres) einen **Fixpunkt** besitzen, d. h. einen Punkt, der bei der Transformation in sich selbst übergeht. Da auf der Kugel jede lineare Transformation einen Fixpunkt hat, kann es im Falle 1 keine andere Decktransformation als die Identität geben; $\widetilde{\mathfrak{F}}$ ist dann mit $\mathfrak{F}$ selber und $\mathfrak{F}$ als Riemannsche Fläche mit der

1) Schwarz, Gesammelte Abhandlungen Bd. II., S. 109—111. Die Anwendung des Lemmas auf die vorliegende Aufgabe nach Poincaré, Acta Mathematica Bd. 4, S. 231—232.

Kugel identisch. *Fall 1 kann nur eintreten, wenn die gegebene Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ der Kugel äquivalent ist.*

Die auf der Fläche $\tilde{\mathfrak{F}}$ über einem und demselben Punkt von $\mathfrak{F}$ gelegenen Punkte erscheinen in der Abbildung als ein System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte t. Ein solches System Σ hat die Eigenschaft, daß je zwei Punkte desselben durch eine zu Γ gehörige Transformation ineinander übergehen, daß aber auch jeder Punkt, in den ein Punkt von Σ durch eine zu Γ gehörige Transformation übergeführt wird, seinerseits zu Σ gehört (vgl. S. 27). Die auf $\mathfrak{F}$ bis auf Pole regulären eindeutigen Funktionen erscheinen, durch t ausgedrückt, als zu Γ gehörige **automorphe Funktionen** jener Variablen, d. h. als Funktionen $z(t)$, die sich gegenüber den Transformationen der Gruppe Γ invariant verhalten:

$$z\left(\frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}\right) = z(t),$$

falls $t^* = \frac{\alpha t + \beta}{\gamma t + \delta}$ eine Transformation der Gruppe Γ ist. Die Gruppe Γ muß **diskontinuierlich** sein; das soll besagen: ein System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte darf innerhalb des Bildbereiches niemals eine Verdichtungsstelle aufweisen. Definieren wir eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_\Gamma$ dadurch, daß wir jedes dem Bildbereich angehörige System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte als einen „Punkt" von $\mathfrak{F}_\Gamma$ betrachten und die Winkelmessung von der t-Ebene auf $\mathfrak{F}_\Gamma$ direkt übertragen, so ist dieses $\mathfrak{F}_\Gamma$ als Riemannsche Fläche mit der gegebenen $\mathfrak{F}$ äquivalent und *stellt die geeignetste Normalform vor, auf die jede Riemannsche Fläche gebracht werden kann.*

Im Falle 2 muß Γ aus ganzen linearen Transformationen bestehen, die im Endlichen keinen Fixpunkt besitzen. Dieser Forderung genügen allein die Schiebungen (Translationen) $t' = t + \alpha$. Eine diskontinuierliche Gruppe von Translationen kann bestehen[1])

1. nur aus der Identität; dann ist $\tilde{\mathfrak{F}}$ mit $\mathfrak{F}$ identisch, und $\mathfrak{F}$ ist der *Ebene* [der *„einfach punktierten" Kugel*, d. i. der Kugel ohne den Nordpol] äquivalent;

oder

2. aus den Wiederholungen einer einzigen Schiebung

$$\Gamma: \quad t^* = t + n\alpha \quad [n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots];$$

dann ist $\mathfrak{F}$ offenbar dem unendlichlangen geraden *Kreiszylinder* und da-

1) Daß nur die drei aufgezählten Fälle möglich sind, ergibt sich durch das Verfahren der Adaption eines (zweidimensionalen) Zahlengitters in bezug auf ein enthaltenes Gitter; s. S. 73f. dieser Schrift oder G. Kowalewski, Die komplexen Veränderlichen und ihre Funktionen, Leipzig 1911, S. 57f.

mit durch die Mercator-Projektion der *doppelt punktierten Kugel* (Kugel ohne Nord- und Südpol) als Riemannsche Fläche äquivalent;
oder kann

3. von der Form sein:

$$t^* = t + m\alpha + n\beta \quad \begin{pmatrix} m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \end{pmatrix},$$

wo α, β zwei Schiebungen in verschiedenen Richtungen sind. Dann ist $\mathfrak{F}$ geschlossen, dt ein auf $\mathfrak{F}$ eindeutiges überall reguläres Differential, das nirgends eine Nullstelle besitzt, und $\mathfrak{F}$ also eine *geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte 1.* Jede solche Fläche — deren Typus (aber nicht deren allgemeinste Form) der Torus ist — gestattet in der Tat auch durch das Integral 1. Gattung eine Uniformisierung, bei der die universelle Überlagerungsfläche auf die Ebene abgebildet wird.

Von den wenigen oben aufgezählten Ausnahmefällen abgesehen ($\mathfrak{F}$ = Vollkugel, einfach oder doppelt punktierte Kugel, geschlossene Fläche vom Geschlechte 1) liegt immer der Fall 3 vor, in welchem *das Innere des Einheitskreises* als Bildbereich auftritt. Da die Peripherie des Einheitskreises für die automorphen Funktionen von t, welche die Funktionen auf der Grundfläche $\mathfrak{F}$ darstellen, im allgemeinen eine natürliche Grenze sein wird, bezeichnet man t als **Grenzkreis-Uniformisierende.**

Die Gruppe Γ ist durch die gegebene Fläche nicht völlig eindeutig bestimmt. Denn t kann durch jede aus t mittels einer linearen, das Innere des Einheitskreises in sich überführenden Transformation T_0 hervorgehende Variable t' ersetzt werden; dabei transformiert Γ sich in die Gruppe

$$\Gamma' = T_0^{-1} \cdot \Gamma \cdot T_0.$$

Wir führen die folgende Ausdrucksweise ein:

Als „Punkt von $\mathfrak{E}$" bezeichnen wir jeden im Innern des Einheitskreises gelegenen Punkt t, als „gerade Linie auf $\mathfrak{E}$" den im Innern des Einheitskreises gelegenen Teil einer jeden Kreislinie, die auf der Peripherie des Einheitskreises senkrecht steht (auch die Durchmesser des Einheitskreises zählen zu diesen „geraden Linien"). Als „Bewegung von $\mathfrak{E}$" gilt jede, das Innere des Einheitskreises in sich überführende lineare Transformation, und als „kongruent" solche Punktmengen auf $\mathfrak{E}$, welche durch „Bewegung" ineinander übergeführt werden können. Das gewöhnliche Winkelmaß wird beibehalten. Dann gilt für diese „Punkte" und „geraden Linien" die vollständige *Bolyai-Lobatschefskysche Geometrie*, also diejenige Geometrie, deren Axiome sich von denen der Euklidischen nur durch Fortlassung des Parallelenaxioms unterscheiden[1]), so daß wir $\mathfrak{E}$ als *Nicht-Euklidische Ebene* bezeichnen können.

---

1) Das hier sich ergebende Modell der ebenen Nicht-Euklidischen Geometrie hängt aufs engste mit dem von Klein im Jahre 1871 entdeckten, auf der

Die (an die Ungleichung $|t| < 1$ gebundene) komplexe Variable t ist dann in derselben Weise als eine zur Darstellung der Punkte der Lobatschefskyschen Ebene geeignete Koordinate aufzufassen, wie etwa die rechtwinkligen Cartesischen Koordinaten x, y oder deren komplexe Zusammenfassung $z = x + iy$ die Punkte der Euklidischen Ebene darstellen. Lineare Transformation von t, bei der das Innere des Einheitskreises in sich übergeht, liefert ein anderes, mit dem ursprünglichen gleichberechtigtes Koordinatensystem der Lobatschefskyschen Ebene. Γ erscheint in der jetzigen Deutung als eine Gruppe von Bewegungen der Nicht-Euklidischen Ebene, oder, genauer gesagt, als *Darstellung einer solchen Gruppe* mit Hilfe einer bestimmten Koordinate t. Diejenige Gruppe von linearen Substitutionen Γ', die wir aus Γ erhalten, wenn wir t mit Hilfe einer das Innere des Einheitskreises in sich überführenden Transformation durch t' ersetzen, ist in dieser Auffassung nur als eine *andere* Darstellung *derselben* Bewegungsgruppe der Nicht-Euklidischen Ebene (nämlich mit Hilfe einer anderen Koordinate t') zu betrachten. Γ enthält keine Drehungen, d. h. keine Bewegung von $\mathfrak{E}$, die einen Punkt von $\mathfrak{E}$ fest läßt.

Jeder Riemannschen Fläche entspricht demnach (von den vier vorher aufgezählten Ausnahmefällen abgesehen) eine einzige, völlig bestimmte, keine Drehungen enthaltende, diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ der Lobatschefskyschen Ebene. Zwei Riemannsche Flächen sind dann und nur dann konform-äquivalent (gehören, wie Riemann sich ausdrückt, derselben Klasse an oder sind Verwirklichungen einer und derselben idealen Riemannschen Fläche), wenn die zugehörigen Nicht-Euklidischen Bewegungsgruppen im Sinne der Lobatschefskyschen Geometrie kongruent sind. Umgekehrt gehört auch zu jeder diskontinuierlichen Nicht-Euklidischen Bewegungsgruppe ohne Drehungen eine bestimmte Klasse von Riemannschen Flächen, (als deren Repräsentant die auf S. 151 konstruierte Fläche $\mathfrak{F}_\Gamma$ gelten kann).[1])

Um eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe Γ der N.-E.[2]) Ebene anschaulich darzustellen, benutzt man nach Klein und Poincaré eine einfache und lückenlose Bedeckung der Ebene durch N.-E. kongruente Be-

Cayleyschen Maßbestimmung beruhenden (Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie, Math. Ann. Bd. 4, S. 573—625) zusammen; vgl. darüber Fricke und Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Bd. I, Leipzig, 1897, S. 3—59. Eine gute Orientierung über Nicht-Euklidische Geometrie gibt das Buch von R. Bonola, das deutsch von Liebmann als Bd. 4 der Sammlung „Wissenschaft und Hypothese" (Die Nicht-Euklidische Geometrie; Leipzig 1908) erschienen ist.

1) Vgl. die Schlußbemerkungen der ersten Koebeschen Mitteilung über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Göttinger Nachrichten 1907, S. 209—210.

2) N.-E. = Nicht-Euklidisch.

reiche (**Fundamentalbereiche**), die auseinander durch die in Γ enthaltenen Bewegungen hervorgehen. Eine möglichst einfache Einteilung dieser Art wird durch die folgenden Überlegungen an die Hand gegeben.

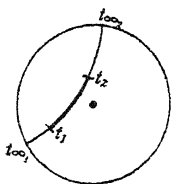



Fig. 27. Nicht-Euklidische Strecke.

(*Definition der N.-E. Entfernung.*) Sind t_1, t_2 irgend zwei voneinander verschiedene Punkte im Innern des Einheitskreises, so verbinden wir sie durch eine N.-E. Gerade, d. h. in der Gaußschen t-Ebene durch einen Kreis, welcher den Einheitskreis an den Stellen t_{∞_1} und t_{∞_2} senkrecht schneidet. Dieser Kreis ist durch t_1, t_2 eindeutig bestimmt, und die Punkte sollen auf ihm in der Reihenfolge t_{∞_1}, t_1, t_2, t_{∞_2} hintereinander liegen (Fig. 27). Das Doppelverhältnis

$$d(t_1 t_2) = \frac{t_1 - t_{\infty_2}}{t_1 - t_{\infty_1}} : \frac{t_2 - t_{\infty_2}}{t_2 - t_{\infty_1}}$$

hat einen reellen positiven Wert > 1, und sein reeller Logarithmus

$$r(t_1 t_2) = \lg d(t_1 t_2)$$

ist daher positiv. $r(t_1 t_2)$ ist gegenüber allen das Innere des Einheitskreises in sich überführenden linearen Transformationen invariant, und die N.-E. Strecke $t_1 t_2$ ist einer andern solchen Strecke $t_1^* t_2^*$ dann und nur dann N.-E. kongruent, wenn $r(t_1 t_2) = r(t_1^* t_2^*)$ ist. Liegen ferner drei Punkte t_1, t_2, t_3 in der Reihenfolge ihrer Numerierung auf einer N.-E. Geraden, so ist

$$r(t_1 t_2) + r(t_2 t_3) = r(t_1 t_3).$$

Zufolge dieser beiden Umstände haben wir die Zahl $r(t_1 t_2)$ als die **Nicht-Euklidische Entfernung** der beiden Punkte t_1, t_2 anzusprechen und sind dadurch imstande, in der N.-E. Ebene nicht nur Winkel, sondern auch Strecken zu messen.

Ist Σ_0 ein System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte, t_0 ein einzelner Punkt von Σ_0 und t ein beliebiger Punkt der N.-E. Ebene, so gibt es wegen der Diskontinuität von Γ nur endlichviele Punkte in Σ_0, deren Entfernung[1]) von t eine willkürlich vorgegebene Größe R nicht übersteigt. Es gibt also unter den Punkten von Σ_0 einen oder mehrere (aber gewiß nur endlichviele) t_h, so daß die Entfernung $r(t t_h)$ unter allen Entfernungen von t nach Punkten des Systems Σ_0 *am kleinsten* ist; t liegt dann, wie ich mich kurz ausdrücken will, am nächsten bei t_h. Ist die Entfernung $r(t t_h)$ effektiv *kleiner* als die Entfernung nach allen von t_h verschiedenen Punkten des Systems Σ_0, so kann ich um t eine ganze Umgebung so abgrenzen, daß auch alle Punkte dieser Umgebung noch am nächsten bei t_h liegen. Ist t_h irgend einer der Punkte von Σ_0, so ver-

1) Das Wort „Entfernung" und alle andern geometrischen Ausdrücke sind bis auf weiteres im N.-E. Sinne zu verstehen.

einige ich alle diejenigen t, welche am nächsten bei t_h liegen, zu einer Punktmenge $\mathfrak{P}_h$, als deren „Zentrum" der Punkt t_h gilt. Die so um die sämtlichen zu Σ_0 gehörigen Zentren zustande kommenden $\mathfrak{P}_h$ sind in ihren inneren Punkten durchweg verschieden und bedecken zusammen die ganze N.-E. Ebene. $\mathfrak{P}_h$ geht durch diejenige in der Gruppe Γ enthaltene Bewegung aus $\mathfrak{P}_0$ hervor, welche t_0 in t_h überführt, und ist also mit $\mathfrak{P}_0$ N.-E. kongruent. Zu jedem Punkte t findet sich in $\mathfrak{P}_0$ ein hinsichtlich Γ äquivalenter, und zwei *innere* Punkte von $\mathfrak{P}_0$ sind niemals untereinander äquivalent: $\mathfrak{P}_0$ hat die Eigenschaften eines Fundamentalbereichs. Außerdem ist $\mathfrak{P}_0$ konvex, d. h. sind t', t'' irgend zwei in $\mathfrak{P}_0$ gelegene Punkte, so gehören auch alle Punkte der N.-E. geradlinigen Verbindungsstrecke $t' t''$ zu $\mathfrak{P}_0$. Die Mittelsenkrechte $\mathfrak{g}_h$ der Strecke $t_0 t_h$ ist der Ort aller Punkte, welche von t_0 und t_h gleiche Entfernung haben; zu allen von t_0 verschiedenen Zentren t_h bekommen wir eine solche Gerade $\mathfrak{g}_h$. Die Begrenzung der abgeschlossenen Menge $\mathfrak{P}_0$ setzt sich aus Teilstrecken dieser Geraden zusammen, und das Innere von $\mathfrak{P}_0$ besteht aus allen denjenigen Punkten, die mit bezug auf die sämtlichen Geraden $\mathfrak{g}_h$ auf derselben Seite liegen wie der Punkt t_0. Da alle Punkte der Geraden $\mathfrak{g}_h$ von t_0 eine Entfernung $\geqq \frac{1}{2} r(t_0 t_h)$ haben und sich unter den Zentren t_h nur endlichviele finden, deren Entfernung von t_0 eine beliebig vorgegebene Grenze $2R$ nicht übersteigt, so zeigt sich, daß nur endlichviele der geradlinigen, zur Begrenzung von $\mathfrak{P}_0$ gehörigen Strecken vom Hauptzentrum t_0 einen Abstand $\leqq R$ haben. $\mathfrak{P}_0$ ist demnach ein endlich- oder unendlichseitiges konvexes Polygon, dessen Ecken (d. s. diejenigen Punkte, welche von drei oder mehr Punkten des Systems Σ_0 gleiche Entfernung haben) sich im Endlichen nirgends häufen. $\mathfrak{P}_0$ heißt nach Fricke ein zu der Gruppe Γ gehöriges **Normalpolygon**. Die Seiten des Normalpolygons sind paarweise dadurch aufeinander bezogen, daß je zwei Seiten eines Paares durch eine zu Γ gehörige Bewegung ineinander übergeführt werden können. Es kommt dabei niemals vor, daß zwei Seiten mit gemeinsamem Eckpunkt aufeinander bezogen sind; denn dieser Eckpunkt müßte ein Fixpunkt derjenigen Bewegung sein, welche die eine Seite in die andere überführt. Durch Wiederholung und Zusammensetzung kann man aus den die zusammengehörigen Seiten von $\mathfrak{P}_0$ ineinander überführenden Bewegungen [das sind diejenigen Bewegungen, welche $\mathfrak{P}_0$ in äquivalente, längs einer Seite an $\mathfrak{P}_0$ angrenzende Fundamentalbereiche $\mathfrak{P}_h$ überführen] die sämtlichen Bewegungen der Gruppe Γ erhalten. Den Beweis dafür erbringt man, indem man einen beliebigen zu Σ_0 gehörigen Punkt t_h mit t_0 durch einen Streckenzug verbindet, der durch keine Ecken der Polygonteilung $\{\mathfrak{P}_h\}$ hindurchführt, und nun darauf achtet, *welche* Polygone der Einteilung dieser Streckenzug sukzessive passiert. Stoßen in der Ecke 1 von $\mathfrak{P}_0$ im ganzen e zu $\mathfrak{P}_0$ äquivalente Polygone $\mathfrak{P}_h$ zusammen ($\mathfrak{P}_0$ selbst ist mitzurechnen), so sind genau e Zentren vorhanden, denen 1 am näch-

sten liegt, und unter den Punkten von $\mathfrak{P}_0$ gibt es e, die zu 1 hinsichtlich Γ äquivalent sind, oder, wie man nach Poincaré sagt, einen **Zykel** von Ecken des Polygons $\mathfrak{P}_0$ bilden. Die Summe der an den Ecken eines einzelnen solchen Zykels gelegenen Winkel von $\mathfrak{P}_0$ ist $= 2\pi$.

Die zur Gruppe Γ gehörige Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}_\Gamma$ (S. 151) ist offenbar dann und nur dann geschlossen, wenn eine positive Zahl R existiert, so daß zu jedem Punkt der N.-E. Ebene mindestens ein äquivalenter hinsichtlich Γ vorhanden ist, der von dem Zentrum t_0 einen N.-E. Abstand $\leqq R$ besitzt. Dann hat jeder Punkt von dem ihm im System Σ_0 am nächsten liegenden eine Entfernung $\leqq R$, insbesondere liegt $\mathfrak{P}_0$ ganz in dem N.-E. Kreise vom Radius R um t_0. Da die Ecken von $\mathfrak{P}_0$ sich im Endlichen nirgends häufen, können unter diesen Umständen überhaupt nur endlichviele solche Ecken existieren: *$\mathfrak{P}_0$ ist endlichseitig.* Die Anzahl seiner Seiten, welche wegen der paarweisen Zuordnung gerade sein muß, werde $= 2s$, die Anzahl der verschiedenen Eckenzykeln $= c$ gesetzt, so daß $2\pi c$ die Winkelsumme von $\mathfrak{P}_0$ bedeutet. Man kann $\mathfrak{P}_0$ derart in endlichviele N.-E. geradlinige Dreiecke zerlegen, daß dadurch eine *Triangulation* von $\mathfrak{F}_\Gamma$ zustande kommt. Ist D_0 die Anzahl der Dreiecke, K_0 die Anzahl der bei dieser Zerlegung innerhalb $\mathfrak{P}_0$ auftretenden Kanten, E_0 die Anzahl der innerhalb $\mathfrak{P}_0$ auftretenden Ecken, $2e_0$ die Anzahl der auf den Seiten von $\mathfrak{P}_0$ zu den Polygonecken neu hinzutretenden Ecken (die paarweise äquivalent sein werden und die Peripherie von $\mathfrak{P}_0$ in $2(s + e_0)$ Einzelstrecken zerteilen), so gilt, da ein konvexes Polygon einfach zusammenhängend ist,

$$D_0 + E_0 - K_0 = 1.$$

Fassen wir aber die Zerlegung von $\mathfrak{P}_0$ als eine Triangulation von $\mathfrak{F}_\Gamma$ auf, so seien die Anzahlen der Dreiecke, Kanten und Ecken bzw. $= D, K, E$. Wir haben

$$D = D_0, \quad K = K_0 + (s + e_0), \quad E = E_0 + e_0 + c$$

Das Geschlecht p von $\mathfrak{F}_\Gamma$ bestimmt sich aus der Gleichung

$$2p - 2 = K - E - D = s - c - 1.$$

Sie zeigt, wie man das Geschlecht einer Riemannschen Fläche finden kann, wenn diese in ihrer Normalform (d. h. wenn die zugehörige Nicht-Euklidische Bewegungsgruppe Γ) gegeben ist, nämlich durch Konstruktion eines zu Γ gehörigen Normalpolygons. Man kann der Gleichung noch eine elegantere Form geben, wenn man bedenkt, daß die Winkelsumme eines Dreiecks in der Nicht-Euklidischen Geometrie kleiner ist als π, und zwar um so viel, als der Flächeninhalt des Dreiecks beträgt. Der N.-E. Inhalt J von $\mathfrak{P}_0$ ergibt sich demnach, wenn man $\mathfrak{P}_0$ von t_0 aus in $2s$ Dreiecke zerlegt, zu $2\pi(s - c - 1)$:

$$J = 4\pi(p - 1).$$

Da jeder Zykel aus wenigsten drei Ecken besteht, ist

$$3c \leqq 2s, \qquad c \leqq \frac{2s}{3}, \qquad s - c \geqq \frac{s}{3},$$

also

$$\frac{s}{3} \leqq 2p - 1;$$

$$2s \leqq 12p - 6.$$

Diese nur von dem Geschlecht p abhängige obere Schranke besteht für die Seiten- und Eckenanzahl eines Normalpolygons.

Die Einteilung der N.-E. Ebene in Normalpolygone dient nicht nur zur Veranschaulichung N.-E. Bewegungsgruppen, sondern liefert auch die Mittel, um solche Gruppen direkt zu konstruieren.[1]

In den Bewegungsgruppen Γ der Nicht-Euklidischen Ebene (oder in den zugeordneten Mannigfaltigkeiten $\mathfrak{F}_\Gamma$) tritt uns die reinste, von allen Zufälligkeiten befreite Verkörperung der Idee der Riemannschen Fläche entgegen. Zur Krönung des ganzen Aufbaues dieses Teiles der Riemannschen Funktionentheorie wäre die Lösung der folgenden Aufgabe erforderlich: *Wenn eine Riemannsche Fläche in ihrer Normalform* (d. h. die zugehörige Bewegungsgruppe der Nicht-Euklidischen Ebene) *gegeben ist, die sämtlichen ein- oder mehrdeutigen unverzweigten Funktionen auf der Fläche mittelst geschlossener analytischer Formeln in der die Punkte der Lobatschefskyschen Ebene darstellenden komplexen Koordinate t auszudrücken.* Diese Aufgabe ist bisher nicht vollständig gelöst; ein wichtiger Ansatz dazu sind die von Poincaré eingeführten Θ-Reihen.[2] Besteht die vorgegebene Gruppe Γ, welche das Innere des Einheitskreises $|t| < 1$ in sich überführt, aus den Substitutionen:

$$t_i^* = tS_i = \frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i} \qquad (\alpha_i\delta_i - \beta_i\gamma_i = 1)$$

$$[i = 0, 1, 2, 3, \ldots; \; S_0 \text{ die Identität}],$$

so sind z. B.

1) Von großer Wichtigkeit sind außer den Normalpolygonen noch die „kanonischen Polygone“, deren Theorie von Fricke entwickelt wurde (s. Fricke-Klein, Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen, Leipzig 1897 bis 1912) und mit deren Hilfe es diesem Forscher gelang, die schon von Riemann ausgesprochene Behauptung, daß die Riemannschen Flächen vom Geschlechte $p\,(>1)$ eine $(6p-6)$-dimensionale Mannigfaltigkeit bilden, streng zu formulieren und zu beweisen. Es sind das Dinge, die aufs engste mit der neuerdings wieder in den Vordergrund der Betrachtung rückenden „Kontinuitätsmethode“ zusammenhängen, durch welche Klein und Poincaré gleich zu Anfang der achtziger Jahre die Uniformisierbarkeit algebraischer Gebilde zu beweisen versuchten. Vgl. den auf S. 142 zitierten Bericht über die Karlsruher Verhandlungen, Deutsche Mathematiker-Vereinigung 1912.

2) Poincaré, Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, Acta Mathematica, Bd. 1 (1882), S. 207.

$$\Theta(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_i t + \beta_i)(\gamma_i t + \delta_i)^3}, \qquad \Theta'(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha_i t + \beta_i)^3(\gamma_i t + \delta_i)}$$

Poincarésche Θ-Reihen. Um die absolute und gleichmäßige Konvergenz dieser Reihen zu erweisen, schlage man um einen willkürlichen Punkt $t_0(|t_0| < 1)$ einen gewöhnlichen Kreis $\varkappa$ vom Radius $a : |t - t_0| \leqq a$, so klein, daß die äquivalenten Kreise $\varkappa S_i$ sich gegenseitig nicht treffen. Das über $\varkappa$ erstreckte Flächenintegral J_i von

$$\left|\frac{dt_i^*}{dt}\right|^2 = \frac{1}{|\gamma_i t + \delta_i|^4}$$

ist der (Euklidische) Inhalt von $\varkappa S_i$; infolgedessen ist $\sum_{i=0}^{\infty} J_i$ konvergent.

Hat t vom Punkte t_0 eine Euklidische Entfernung $|t - t_0| \leqq \frac{a}{2}$, so ist [Formel (22), (23) auf S. 87]

$$\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi \left|\frac{dt_i^*}{dt}\right|^2 \leqq J_i.$$

Infolgedessen ist

$$\sum \frac{1}{|\gamma_i t + \delta_i|^4}$$

in der Umgebung von $t = t_0$ gleichmäßig konvergent. Da ferner gleichmäßig für $|t| \leqq q (< 1)$

$$\lim_{i=\infty} \left|\frac{\alpha_i t + \beta_i}{\gamma_i t + \delta_i}\right| = 1$$

ist (denn die äquivalenten Punkte t_i^* häufen sich nur am Rande des Einheitskreises), so ergibt sich daraus die absolute und gleichmäßige Konvergenz der beiden Reihen Θ, Θ'. Θ hat bei $t = 0$ und allen dazu hinsichtlich der Gruppe Γ äquivalenten Stellen einen Pol 1. Ordnung und ist sonst regulär, Θ' hat dort einen Pol 3. Ordnung und ist sonst regulär. Aus der Gleichung

$$\Theta(t)(dt)^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(dt_i^*)^2}{t_i^*}$$

geht hervor, daß $\Theta(t)(dt)^2$ durch eine beliebige Transformation S_i der Gruppe in sich übergeht:

$$\Theta(tS_i) = (\gamma_i t + \delta_i)^4 \cdot \Theta(t).$$

Ebenso folgt

$$\Theta'(tS_i) = (\gamma_i t + \delta_i)^4 \cdot \Theta'(t).$$

$\frac{\Theta(t)}{\Theta'(t)}$ ist demnach eine Funktion, die gegenüber der Gruppe Γ automorph ist; sie verschwindet nicht identisch, besitzt aber im Punkte $t = 0$ (und allen dazu äquivalenten) eine Nullstelle 2. Ordnung, kurz: ist eine

eindeutige, von wesentlichen Singularitäten freie, nicht konstante Funktion auf der Grundfläche $\mathfrak{F}_\Gamma$.

Man ersieht aus diesem Beispiel, wie es möglich sein muß, nachdem einmal die Riemannsche Fläche in ihrer Normalform vorliegt, alle Sätze über die Existenz von Funktionen und Integralen auf ihr mit Hilfe analytischer Formeln in ähnlicher Weise abzuleiten, wie dies seit langem für $p = 1$ durch die Theorie der elliptischen Funktionen geschehen ist. Erst wenn dieses Ziel allgemein erreicht sein wird, ist ein völlig geschlossener Aufbau der Riemannschen Funktionentheorie möglich. Man wird dann auf transzendentem Wege (mit Hilfe der Methode des alternierenden Verfahrens oder des Dirichletschen Prinzips) nicht mehr die Existenz der Funktionen oder Integrale, sondern allein die Existenz der Grenzkreisuniformisierenden beweisen, d. h. auf transzendentem Wege zunächst die Normalform der Riemannschen Fläche herstellen, falls diese noch nicht in ihrer Normalform gegeben ist; darauf aber mit Hilfe analytischer Formeln zu allen übrigen, relativ zur gegebenen Fläche unverzweigten Funktionen herabsteigen. Hier liegen noch dankbare Probleme für die Zukunft vor.

§ 21. Konforme Abbildung einer Riemannschen Fläche auf sich selbst.

Von einer Bewegungsgruppe der N.-E. Ebene sagen wir, sie enthielte **infinitesimale Transformationen,** wenn es Bewegungen in der Gruppe gibt, die beliebig wenig von der Identität verschieden sind. Eine diskontinuierliche Bewegungsgruppe, z. B. Γ, enthält gewiß keine infinitesimalen Transformationen. Von diesem Satz gilt aber auch die Umkehrung:

Eine N.-E. Bewegungsgruppe ist dann und nur dann diskontinuierlich, wenn sie keine infinitesimalen Bewegungen enthält.

Beim Beweise bedienen wir uns wie bisher der komplexen Koordinate t. Eine lineare Transformation T: $t \longrightarrow t^*$ hat auf der t-Kugel im allgemeinen zwei verschiedene Fixpunkte τ', τ'' und läßt sich dann so schreiben:

$$(53) \qquad \frac{t^* - \tau''}{t^* - \tau'} = \mu \cdot \frac{t - \tau''}{t - \tau'} \text{[1]};$$

die Konstante μ heißt der **Multiplikator** von T. Führt T das Innere des Einheitskreises in sich über, so sind zwei Möglichkeiten vorhanden:

entweder liegen τ', τ'' beide auf dem Rande des Einheitskreises, und μ ist dann positiv **(hyperbolische Transformation),**

oder τ', τ'' sind Spiegelbilder zueinander in bezug auf den Einheitskreis, und τ' liegt im Innern desselben; dann ist $|\mu| = 1$ **(elliptische**

1) Ist $\tau'' = \infty$, so bedeutet das: $\frac{1}{t^* - \tau'} = \mu \cdot \frac{1}{t - \tau'}$.

Transformation). In der N.-E. Ebene ist T eine Drehung um τ', und die durch die Gleichung $\mu = e^{i\varphi}$ bis auf ganzzahlige Vielfache von 2π bestimmte reelle Zahl φ ist der Drehwinkel von T.

Als Übergangsfall schiebt sich zwischen die hyperbolische und elliptische Transformation die **parabolische** ein, welche nur *einen* Fixpunkt τ' besitzt. Führt sie das Innere des Einheitskreises in sich über, so hat sie die Form

(54) $$\frac{1}{t^* - \tau'} = \frac{1}{t - \tau'} + \frac{ib}{\tau'} \quad (|\tau'| = 1,\ b \text{ reell}).$$

Wir stützen unsern Beweis auf den folgenden *Hilfssatz:* Sind

$$t_n,\ t_n^* \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

zwei Reihen von Punkten in der N.-E. Ebene, die gegen denselben Punkt $t_0 (|t_0| < 1)$ konvergieren; ist ferner T_n eine N.-E. Bewegung, welche t_n in t_n^* überführt, und gibt es eine Umgebung von t_0, die keinen Fixpunkt einer der Bewegungen $T_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ enthält, so konvergiert T_n gegen die Identität.

Sind $\tau_n' (|\tau_n'| \leqq 1)$, τ_n'' die beiden Fixpunkte von T_n (die auch zusammenfallen können), so soll also eine positive Zahl l existieren, so daß für alle n

$$|t_0 - \tau_n'|,\quad |t_0 - \tau_n''| > \frac{3l}{2}$$

ist. Setze ich

$$|t_n - t_n^*| = \varepsilon_n,$$

so kann ich annehmen, daß für alle n

$$|t_n - t_0|,\quad |t_n^* - t_0| < \frac{l}{2}, \quad \text{also} \quad \varepsilon_n < l$$

ist. Die Differenzen

$$|t_n - \tau_n'|,\quad |t_n - \tau_n''|,\quad |t_n^* - \tau_n'|,\quad |t_n^* - \tau_n''|$$

sind dann alle vier $> l$. Ist T_n nicht parabolisch, so hat es die Form

(55) $$\frac{t^* - \tau_n''}{t^* - \tau_n'} = \mu_n \cdot \frac{t - \tau_n''}{t - \tau_n'}.$$

Setze ich hierin $t = t_n$, also $t^* = t_n^*$, so kommt

$$\mu_n = \frac{t_n^* - \tau_n''}{t_n - \tau_n''} : \frac{t_n^* - \tau_n'}{t_n - \tau_n'} = \left(1 + \frac{t_n^* - t_n}{t_n - \tau_n''}\right) : \left(1 + \frac{t_n^* - t_n}{t_n - \tau_n'}\right).$$

Das ergibt die Abschätzung

(56) $$|\mu_n - 1| \leqq \frac{2\varepsilon_n}{l - \varepsilon_n}.$$

Anstelle von (55) kann ich schreiben

(57) $$\frac{1}{t^* - \tau_n'} = \lambda_n + \mu_n \frac{1}{t - \tau_n'} \quad (\lambda_n \text{ konstant});$$

denn diese Gestalt muß eine jede lineare Substitution mit dem Fixpunkt

τ'_n haben. Auch wenn die Transformation T_n parabolisch ist, kann ich sie in die Form (57) setzen; es wird dann speziell $\mu_n = 1$ sein, also (56) gleichfalls zutreffen. Wir gewinnen die Limesgleichung

$$\lim_{n=\infty} \mu_n = 1.$$

Setzen wir in (57) wiederum $t = t_n$, $t^* = t^*_n$, so finden wir

$$\lambda_n = \frac{t_n - t^*_n}{(t_n - \tau'_n)(t^*_n - \tau'_n)} - \frac{\mu_n - 1}{t_n - \tau'_n},$$

$$|\lambda_n| \leqq \frac{\varepsilon_n}{l^2} + \frac{|\mu_n - 1|}{l}, \quad \lim_{n=\infty} \lambda_n = 0.$$

Bringen wir endlich (57) in seine natürliche Form

$$t^* = \frac{\alpha_n t + \beta_n}{\gamma_n t + \delta_n},$$

so ergeben sich die Werte

$$\alpha_n = 1 + \lambda_n \tau'_n, \quad \beta_n = \tau'_n(\mu_n - 1 - \lambda_n \tau'_n),$$
$$\gamma_n = \lambda_n, \qquad \delta_n = \mu_n - \lambda_n \tau'_n,$$

die von den entsprechenden Koeffizienten der identischen Substitution $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ um weniger abweichen als

$$|\mu_n - 1| + |\lambda_n|.$$

Der Hilfssatz ist damit bewiesen.

Sei jetzt Γ^* eine N.-E. Bewegungsgruppe *ohne infinitesimale Transformationen* und τ ein Punkt der N.-E. Ebene, der Fixpunkt einer zu Γ^* gehörigen Drehung ist. Mit S_τ bezeichne ich die sämtlichen in Γ^* enthaltenen Drehungen mit dem Fixpunkt τ, die für sich eine Gruppe bilden. Normiere ich die Drehwinkel φ der S_τ durch die Bedingung $0 \leqq \varphi < 2\pi$, so gibt es unter den S_τ wegen des Fehlens infinitesimaler Transformationen eine, S^0_τ, mit *kleinstem* Drehwinkel $\varphi_0 > 0$. Der Drehwinkel eines jeden S_τ ist ein ganzzahliges Multiplum von φ_0, da man sonst durch geeignete Wahl einer ganzen Zahl k eine Transformation $S_\tau \cdot (S^0_\tau)^{-k}$ mit kleinerem Drehwinkel als S^0_τ erzeugen könnte; S^0_τ ist also in der Gruppe der S_τ eine „primitive“ Transformation, aus der alle andern durch Potenzieren erhalten werden. Bestimmt man eine ganze Zahl h durch die Bedingung

$$h\varphi_0 \leqq 2\pi < (h+1)\varphi_0,$$

so bekommt $(S^0_\tau)^{h+1}$ sicher einen kleineren Drehwinkel $(h+1)\varphi_0 - 2\pi$ als S^0_τ, wenn nicht $h\varphi_0 = 2\pi$ ist. Es muß demnach $\varphi_0 = \frac{2\pi}{h}$ sein, und h ist die *Ordnung* der endlichen zyklischen Gruppe (S_τ), die aus den Drehungen

$$(S^0_\tau)^1, (S^0_\tau)^2, (S^0_\tau)^3, \ldots, (S^0_\tau)^h = 1$$

besteht.

Die Fixpunkte der in Γ^* vorkommenden Drehungen können sich im Endlichen nirgends häufen. Wäre nämlich $\tau(|\tau| < 1)$ ein solcher Häufungspunkt und

$$S_n \left(\text{Drehwinkel} = \frac{2\pi}{h_n}\right) \qquad [n = 1, 2, 3, \ldots]$$

eine Folge primitiver Drehungen aus Γ^*, deren Fixpunkte τ_n alle verschieden sind und gegen τ konvergieren, so gibt es a priori zwei Möglichkeiten:

1. Die Ordnungen h_n bleiben für alle n unter einer festen Grenze. Dann finden sich unter den S_n unendlichviele, denen *dieselbe* Ordnung h zukommt; es seien das die Transformationen $S_1', S_2', S_3', \cdots$. $S_n' S_{n+1}'^{-1}$ ist für unendlich große n infinitesimal. Dieser Fall ist also ausgeschlossen.

2. Die Ordnungen h_n bleiben nicht unter einer festen Grenze. Dann kann man aus den S_n eine solche Folge S_n' auswählen, daß die zugehörigen Ordnungszahlen gegen ∞ und die Drehwinkel mithin gegen 0 konvergieren; das widerspricht gleichfalls dem Fehlen infinitesimaler Operationen in Γ^*.

Nachdem dies festgestellt ist, können wir nun auch zeigen, daß ein System hinsichtlich Γ^* äquivalenter Punkte im Endlichen keine Häufungsstelle besitzen kann. Wäre nämlich $t_0(|t_0| < 1)$ Grenze einer Folge äquivalenter Punkte $t_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$\lim t_n = t_0,$$

so bedeute S_n diejenige zu Γ^* gehörige Bewegung, welche t_n in t_{n+1} überführt. Um t_0 grenze ich eine Umgebung $\mathfrak{U}_0$ ab, die, außer etwa in t_0, keinen Fixpunkt einer zu Γ^* gehörigen Drehung enthält. Nach dem Hilfssatz kann nur für endlichviele Indizes n der Fixpunkt τ_n' von $S_n(|\tau_n'| \leqq 1)$ außerhalb $\mathfrak{U}_0$ liegen; von einem gewissen n ab muß folglich $\tau_n' = t_0$ sein, und es enthält keine Einschränkung, anzunehmen, daß dies bereits von $n = 1$ ab gilt. Alle t_n gehen dann aus t_1 durch solche Drehungen um t_0 hervor, die in der Gruppe Γ^* enthalten sind; durch solche Drehungen kann ich aber t_1 nur in endlichviele verschiedene Lagen bringen. Die Möglichkeit einer Verdichtungsstelle ist somit widerlegt, und der Beweis des am Anfang (S. 159) ausgesprochenen Satzes ist erbracht.

Nachdem wir dies vorausgeschickt haben, kommen wir nun zum eigentlichen Gegenstand dieses Schlußparagraphen unserer Darstellung. Es handelt sich um die Frage nach denjenigen umkehrbar eindeutigen konformen Abbildungen, die eine Riemannsche Fläche $\mathfrak{F}$ in sich selbst erleiden kann. Diese Abbildungen bilden eine Gruppe, welche offenbar für die Theorie der Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ eine analoge Bedeutung besitzt wie etwa die Gruppe der Bewegungen für die metrische Geometrie, und wir

sprechen daher eine Tatsache von prinzipieller Wichtigkeit aus, wenn wir das folgende, im wesentlichen von Klein herrührende Theorem formulieren:

Die Gruppe der konformen Abbildungen einer Riemannschen Fläche auf sich selbst ist stets diskontinuierlich, abgesehen von folgenden sieben Ausnahmefällen: $\mathfrak{F}$ = Vollkugel, einfach oder doppelt punktierte Kugel, Kugelkalotte, punktierte Kugelkalotte (d. h. Kalotte ohne ihren Mittelpunkt), Kugelzone (zwischen zwei Breitenkreisen)[1]), geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte 1.

Beweis[2]): $\widetilde{\mathfrak{F}}$ bedeute die universelle Überlagerungsfläche über $\mathfrak{F}$, t die Grenzkreis-Uniformisierende, die $\widetilde{\mathfrak{F}}$ konform auf das Innere des Einheitskreises abbildet, Γ die zur Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ gehörige N.-E. Bewegungsgruppe; die Fälle, in denen statt des Einheitskreises die t-Kugel oder die unendliche t-Ebene auftritt, können wir hier beiseite lassen, da in ihnen unser Theorem ohnehin ungültig ist (Ausnahmefälle 1, 2, 3, 7). Es sei C eine konforme Abbildung von $\mathfrak{F}$ auf sich selbst, die den Punkt $\mathfrak{p}_0$ in $\mathfrak{p}_0'$ überführe. $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ sei ein Punkt auf $\widetilde{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{p}_0$, $\tilde{\mathfrak{p}}_0'$ ein Punkt auf $\widetilde{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{p}_0'$. Wegen des einfachen Zusammenhangs von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ gibt es eine einzige umkehrbar-eindeutige und -gebietsstetige Abbildung $\tilde{C}$ von $\widetilde{\mathfrak{F}}$ auf sich selbst, bei welcher

1. $\tilde{\mathfrak{p}}_0$ in $\tilde{\mathfrak{p}}_0'$ übergeht,

2. jeder Punkt $\tilde{\mathfrak{p}}$ auf $\widetilde{\mathfrak{F}}$ in einen Punkt $\widetilde{\mathfrak{p}C}$ übergeht, dessen Spurpunkt $\mathfrak{p}C$ durch die Abbildung C aus dem Spurpunkt $\mathfrak{p}$ von $\tilde{\mathfrak{p}}$ entstand.

$\tilde{C}$ ist gleichfalls konform und erscheint also in der t-Ebene als eine das Innere des Einheitskreises in sich überführende lineare Transformation T, und zwar als eine Transformation, welche jedes System hinsichtlich Γ äquivalenter Punkte in ein ebensolches Punktsystem überführt. Diese letzte Eigenschaft drückt sich in der Gleichung aus

$$T \cdot \Gamma \cdot T^{-1} = \Gamma,$$

welche besagt, daß T mit Γ vertauschbar ist, oder: daß für jede zu Γ gehörige Substitution S die „Transformierte" TST^{-1} gleichfalls zu Γ gehört. Es ist auch umgekehrt klar, daß jede mit Γ vertauschbare lineare Substitution T, die $|t| < 1$ in sich überführt, eine konforme Abbildung von $\mathfrak{F}_\Gamma$ in sich liefert. Die sämtlichen mit Γ vertauschbaren Bewegungen der N.-E. Ebene bilden ersichtlich eine *Gruppe* Γ_c, die Γ als Teil enthält. Die Diskontinuität dieser Gruppe Γ_c ist zu erweisen; es genügt dazu nach dem

1) Dies sind je nach der Breite der Zone unendlich viele wesentlich verschiedene Riemannsche Flächen.

2) Dieser Beweis rührt von Poincaré her: Acta Mathematica Bd. 7, 1885, S. 16—19. Poincaré faßt dort zwar nur geschlossene Riemannsche Flächen ins Auge, aber sein Beweis bleibt wörtlich auch für offene Flächen gültig.

Satze zu Anfang dieses Paragraphen, das Fehlen infinitesimaler Operationen in Γ_c zu erkennen.

Sind S, T irgend zwei das Innere des Einheitskreises in sich überführende lineare Transformationen, so sind diejenigen beiden Punkte, die T in die Fixpunkte von S wirft, die Fixpunkte der Transformation

$$TST^{-1} = S'.$$

Soll S' die *gleichen* Fixpunkte haben wie S, so muß also T entweder jeden der beiden Fixpunkte von S in sich überführen [d. h. wenn S nicht parabolisch ist, dieselben Fixpunkte wie S besitzen, und wenn S parabolisch ist, wenigstens einen mit dem Fixpunkt von S zusammenfallenden Fixpunkt haben] oder T muß die beiden Fixpunkte σ', σ'' der (nicht-parabolischen) Transformation S miteinander vertauschen, d. h. σ' in σ'' und σ'' in σ' überführen. Das letzte zu bewirken, ist, wie aus (54) hervorgeht, ein parabolisches T außerstande, ein nicht-parabolisches T, (53), kann es nur dann, wenn $\mu^2 = 1$, also $\mu = -1$, d. h. wenn T eine elliptische Transformation vom Drehwinkel π ist. Soll insbesondere S mit T vertauschbar sein:

$$TS = ST, \quad TST^{-1} = S,$$

so ist das demzufolge nur möglich, wenn

I. beide Transformationen S und T nicht parabolisch sind und dieselben Fixpunkte besitzen, oder

II. beide Transformationen S und T parabolisch sind und den gleichen Fixpunkt besitzen, oder

III. S und T elliptische Transformationen vom Drehwinkel π sind, oder

IV. eine der beiden Transformationen S, T die Identität ist.

Besteht Γ allein aus der Identität, so ist $\mathfrak{F}$ dem Innern des Einheitskreises oder, was dasselbe ist, einer Kugelkalotte konform-äquivalent [Ausnahmefall 4].

Ist S eine beliebige von der Identität verschiedene Substitution aus Γ und nehmen wir im Gegensatz zu unserer Behauptung an, eine Folge von Operationen $T_n \neq 1$ aus Γ_c konvergiere gegen die Identität 1, so wäre mit $T_n S T_n^{-1}$ auch $T_n S T_n^{-1} S^{-1}$ in Γ enthalten. Diese Operation konvergiert aber ebenso wie T_n mit unbegrenzt wachsendem n gegen die Identität, und da Γ keine infinitesimalen Transformationen enthält, muß von einem endlichen n ab

$$T_n S T_n^{-1} S^{-1} = 1,$$

d. h. S mit T_n vertauschbar sein. Von den vorher aufgezählten vier Fällen, in denen dies möglich ist, kommen hier, da S nicht elliptisch ist, nur die Fälle I. und II. in Frage. Wenden wir das daraus sich ergebende Resultat auf alle möglichen Operationen $S \neq 1$ der Gruppe Γ an, so erkennen wir, daß uns nur zwei Möglichkeiten offen bleiben:

I. Alle Operationen von Γ sind hyperbolisch und haben dieselben beiden Fixpunkte, die man an die Stellen $+i$ und $-i$ verlegen kann;

II. Alle Operationen von Γ sind parabolisch und haben den gleichen Fixpunkt, der an der Stelle i liegen möge.

Fall I.: Durch die Abbildung

$$z = \lg \frac{i - t}{i + t}$$

geht das Innere des Einheitskreises der t-Ebene über in den Parallelstreifen $-\frac{\pi}{2} < y < +\frac{\pi}{2}$ der $z = (x + iy)$-Ebene, und Γ in eine Gruppe von Schiebungen parallel zur x-Achse, d. h. Γ bekommt die Form

$$(58) \qquad z^* = z + n \cdot \frac{2\pi}{a} \qquad \begin{bmatrix} a \text{ eine positive Konstante;} \\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \end{bmatrix}.$$

$\mathfrak{F}_\Gamma$ wird dann vermittels

$$w = e^{aiz}$$

umkehrbar eindeutig abgebildet auf den Kreisring

$$e^{-\frac{1}{2}a\pi} < |w| < e^{\frac{1}{2}a\pi},$$

den man schließlich durch stereographische Projektion in eine Kugelzone verwandeln kann, deren Mittellinie der Äquator ist: Ausnahmefall 6.

Fall II.: Durch die Abbildung

$$z = \frac{2}{t - i} - i \qquad (z = x + iy)$$

geht das Innere des Einheitskreises der t-Ebene über in die obere Halbebene $y > 0$ und Γ in eine Gruppe von Schiebungen parallel zur x-Achse; Γ bekommt also wieder die Form (58), und $w = e^{aiz}$ verwandelt $\mathfrak{F}_\Gamma$ in den punktierten Einheitskreis der w-Ebene:

$$0 < |w| < 1: \qquad \text{Ausnahmefall 5.}$$

Damit ist das Haupttheorem vollständig bewiesen, und wir haben zugleich Gelegenheit gefunden, die Verwendbarkeit der Normalform $\mathfrak{F}_\Gamma$ der Riemannschen Flächen an einem wichtigen Beispiel kennen zu lernen. Daß in den sieben ausgeschlossenen Fällen wirklich eine kontinuierliche Gruppe von konformen Abbildungen der Fläche in sich existiert, ist trivial. Es ist auch leicht, diese Gruppen vollständig anzugeben.

Eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlechte $p > 1$ gestattet nur endlichviele konforme Abbildungen in sich.[1]) Denn ein System hinsichtlich dieser Gruppe äquivalenter Punkte darf auf der geschlossenen Fläche keine Häufungsstelle aufweisen und kann daher nur aus endlichvielen Punkten bestehen.

1) Für diesen, von H. A. Schwarz zuerst aufgestellten spezielleren Satz existieren andere mehr algebraische Beweise, einer von Weierstraß (1875), der erst 1895 (Werke Bd. II, S. 235—244) veröffentlicht wurde, einer von Noether (Math. Ann. Bd. 20, S. 59—62, und Bd. 21, S. 138—140; 1882) und einer von Hurwitz (Math. Ann. Bd. 41, S. 403—411; 1893).

Berichtigungen und Zusätze.

Zu Seite 18 bis 19.

Der Definition des Begriffs der zweidimensionalen Mannigfaltigkeit ist die Forderung hinzuzufügen: *Zu irgend zwei Umgebungen eines Punktes existiert stets eine Umgebung, welche in beiden enthalten ist.*

Die Behauptungen auf S. 19 über das stetige Abbild einer abgeschlossenen Menge sind zu beschränken auf „ganz im Endlichen gelegene“ Mengen; eine solche Menge $\mathfrak{E}$ ist dadurch gekennzeichnet, daß jede aus unendlich vielen Punkten bestehende Teilmenge von $\mathfrak{E}$ eine Verdichtungsstelle besitzt. Man vergleiche damit die auf p. 24 gegebene Definition der geschlossenen Fläche. Mit Hilfe der Triangulation läßt sich die Eigenschaft einer Menge, ganz im Endlichen zu liegen, dahin beschreiben, daß sie nur Punkte einer endlichen Anzahl von Elementardreiecken enthält.

Zu Seite 58 bis 60.

Der im Text gegebene Beweis von 2. läßt sich durch folgenden kürzeren ersetzen. Wendet man das unter 1. Bewiesene auf diejenige Kurve $\mathfrak{c}$ in $\mathfrak{G}$ an, deren Bild in $\mathfrak{G}'$ ein Kreis $\mathfrak{c}'$ um O' ist, so ergibt sich die Gleichung

$$1 = n_1 \cdot n_0,$$

in der n_1 die Ordnung von O in bezug auf $\mathfrak{c}$ bedeutet; aus ihr folgt ohne weiteres $n_0 = \pm 1$.

Zu Seite 118.

Der Beweis dafür, das Θ_{12} eine auf $\hat{\mathfrak{F}}$ eindeutige Funktion ist, ergibt sich aus der Gleichung (III_0), S. 115; denn da für einen Weg α, der ~ 0 ist, dw_α verschwindet, ist für einen solchen Weg

$$\int_\alpha d\omega_{12} = 2n\pi i, \quad e^{\int_\alpha d\omega_{12}} = 1.$$

Die letzte Gleichung gilt demnach für jeden *auf* $\hat{\mathfrak{F}}$ *sich schließenden Weg* α, und darum ist auf $\hat{\mathfrak{F}}$ die Funktion

$$e^{\int d\omega_{12}} = \Theta_{12},$$

bei deren Bildung von einem fest gewählten Anfangspunkt $\hat{\mathfrak{p}}_0$ nach dem variablen Argumentpunkt $\hat{\mathfrak{p}}$ auf $\hat{\mathfrak{F}}$ integriert wird, vom Integrationswege unabhängig und eine eindeutige Funktion von $\hat{\mathfrak{p}}$.

Anhang.

Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen.*)

Es ist diese Note als ein Zusatz zu den Analysis-situs-Betrachtungen meines Buches „Die Idee der Riemannschen Fläche", namentlich zu dem vom Geschlechte geschlossener Flächen handelnden § 11 gedacht. Durch eine strenge Begründung des Charakteristikenbegriffs (Zahl der Überschneidungen zweier Kurven) soll die eigentliche Bedeutung der kanonischen Zerschneidung und im Zusammenhang damit die Rolle, welche die „Überlagerungsfläche der Integralfunktionen" spielt, aufgeklärt werden. Es handelt sich dabei um Dinge, die im wesentlichen bekannt sind; aber es lag mir daran, kurz zu zeigen, wie sie sich im Anschluß an die in meinem Buche benutzten Begriffsbildungen in strenger und einfacher Weise darstellen lassen, und in welcher Beleuchtung sie von dem dort eingenommenen Standpunkt aus erscheinen.

Es sei $\mathfrak{F}$ eine geschlossene, zweiseitige, triangulierte Fläche, α und β zwei mit Umlaufssinn versehene geschlossene Streckenzüge auf ihr. Es möge sowohl jeder dieser beiden Streckenzüge sich selber als auch sie beide untereinander sich nur in einzelnen Punkten schneiden.[1]) Nachdem auf $\mathfrak{F}$ eine positive Indikatrix festgesetzt ist, können wir von jedem solchen Punkt, in welchem α und β sich schneiden, feststellen, ob α dort den Weg β von rechts nach links oder von links nach rechts überkreuzt. Es genügt dazu die Bemerkung, daß wir die positive Drehung als eine „Wendung links-um" betrachten. Mathematisch schärfer kann man das so fassen: Man mache eine derartige Unterteilung der vorliegenden Triangulation, daß β aus lauter Kanten der neuen Triangulation besteht. Von den beiden Dreiecken dieser (fortan allein benutzten) feineren Teilung, die längs einer zu β gehörigen und bei positiver Durchlaufung des Streckenzuges von der Ecke 1 zur Ecke 2 führenden Kante $\overrightarrow{12}$ aneinander stoßen, ist dasjenige das linke,

*) Mit einigen Auslassungen abgedruckt aus den Jahresber. d. Deutsch. Mathem.-Vereinig 25 (1916), S. 265—278.

1) Es soll also beispielsweise nicht vorkommen, daß α und β streckenweise ganz zusammenfallen. — Übrigens wird diese einschränkende Annahme nur zum Zweck einer möglichst bequemen Ausdrucksweise gemacht.

dessen positive Indikatrix (12*) heißt.[1]) Indem wir die Stellen, an denen α den Weg β von rechts nach links überkreuzt, positiv (mit $+1$), die anderen aber negativ (mit -1) in Ansatz bringen, sei $s(\alpha, \beta)$ die so berechnete Anzahl der Überkreuzungen von α über β oder, wie wir mit Kronecker sagen wollen, die **Charakteristik** von α in bezug auf β. Es ist offenbar

$$(1) \qquad s(\beta, \alpha) = -s(\alpha, \beta).$$

Es gilt jetzt, diesen Charakteristenbegriff von Streckenzügen auf beliebige geschlossene Kurven zu übertragen (bei denen wir nicht ohne weiteres von einem linken und rechten Ufer, von endlichvielen Überkreuzungen u. dgl. reden können). Sind α, α^* zwei geschlossene Kurven auf $\mathfrak{F}$ und läßt sich α in eine endliche Anzahl r von Bögen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$ und gleicherweise α^* in r Teilbögen $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \ldots, \alpha_r^*$ zerlegen derart, daß jedesmal α_i und α_i^* beide der Umgebung $\mathfrak{U}_i$ eines geeigneten Punktes $\mathfrak{q}_i$ auf $\mathfrak{F}$ angehören, so wollen wir sagen, diese beiden Kurven verliefen **„nahe beieinander"** oder die eine verlaufe **„in der Nähe der andern"**. α und α^* zeigen ein völlig gleichartiges Verhalten, solange wir uns nur um Verhältnisse kümmern, die dem Bereich der Analysis situs angehören; beispielsweise hat eine Integralfunktion für α und α^* immer den gleichen Wert. Wir haben nun zu zeigen: *Ist β ein vorgegebener geschlossener Streckenzug, α eine geschlossene Kurve auf $\mathfrak{F}$, α', α'' irgend zwei geschlossene Streckenzüge, die in der Nähe von α verlaufen, so ist stets*

$$s(\alpha', \beta) = s(\alpha'', \beta).$$

Dies wird bewiesen sein, wenn wir zu β eine Integralfunktion F konstruieren, deren Wert für jeden geschlossenen Streckenzug α' mit $s(\alpha', \beta)$ übereinstimmt. Denn dann ist

$$F(\alpha) = F(\alpha') = s(\alpha', \beta)$$

und ebenso

$$F(\alpha) = F(\alpha'') = s(\alpha'', \beta).$$

Wir benutzen die oben hergestellte Triangulation, bei der β aus Kanten von Elementardreiecken besteht. Einer beliebigen Integralfunktion F ordnen wir mit Bezug auf jedes Paar Δ_1, Δ_2 von Elementardreiecken der Triangulation, die längs einer Kante aneinanderstoßen, die Zahl $x_{\Delta_1 \Delta_2}[F]$ zu, welche gleich dem Werte der Integralfunktion für einen Weg ist, der den Schwerpunkt von Δ_1 mit dem von Δ_2 innerhalb des Dreieckpaares $\Delta_1 + \Delta_2$ verbindet. Ist γ ein geschlossener

---

1) Vgl. Fig. 20, das Bild des linken Ufers eines Polygons, und den zugehörigen Text auf S. 66.

Streckenzug, der die Kanten der Triangulation in einzelnen Punkten, die keine Triangulationsecken sind, überschreitet, und geht an einer beliebigen solchen Kreuzungsstelle γ aus dem Dreieck Δ_1 in das Dreieck Δ_2 hinüber, so ist $F(\gamma)$ gleich der über die sämtlichen Kreuzungsstellen erstreckten Summe $\sum x_{\Delta_1 \Delta_2}[F]$. Wir definieren ferner für jedes Dreieckpaar Δ_1, Δ_2 eine Zahl $x_{\Delta_1 \Delta_2}$ in folgender Weise:

$$x_{\Delta_1 \Delta_2} = 0,$$

falls die gemeinsame Kante von Δ_1 und Δ_2 nicht zu β gehört;

$$x_{\Delta_1 \Delta_2} = 1,$$

falls Δ_1 das rechte, Δ_2 das linke Dreieck ist, das an eine zu β gehörige und infolgedessen mit positivem Durchlaufungssinn versehene Kante stößt; im letzten Fall setzen wir ferner

$$x_{\Delta_2 \Delta_1} = -1.$$

Dann ist stets

$$x_{\Delta_2 \Delta_1} = -x_{\Delta_1 \Delta_2}$$

und, wenn $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_r$ die sich um eine Triangulationsecke $\mathfrak{e}$ gruppierenden Elementardreiecke in zyklischer Anordnung sind,

$$x_{\Delta_1 \Delta_2} + x_{\Delta_2 \Delta_3} + \cdots + x_{\Delta_r \Delta_1} = 0. \tag{$\mathfrak{e}$}$$

Denn von den in der letzten Gleichung summierten Größen sind ebenso viele $= +1$ wie $= -1$, da unter den in $\mathfrak{e}$ endigenden, zu β gehörigen Kanten ebenso viele mit ihrem positiven Durchlaufungssinn auf $\mathfrak{e}$ zulaufen wie von $\mathfrak{e}$ fortgehen. Infolgedessen (S. 69) gibt es eine Integralfunktion F, die für jedes Dreieckspaar Δ_1, Δ_2 die Gleichung

$$x_{\Delta_1 \Delta_2}[F] = x_{\Delta_1 \Delta_2}$$

befriedigt, und es ist ohne weiteres klar, daß diese Integralfunktion die geforderten Eigenschaften besitzt.

Es sei jetzt auch β eine beliebige geschlossene Kurve, β', β'' geschlossene Streckenzüge, die in der Nähe von β verlaufen. Dann gelten die Gleichungen

$$s(\alpha', \beta') = s(\alpha'', \beta'),$$
$$s(\beta', \alpha'') = s(\beta'', \alpha'').$$

Statt der zweiten können wir auf Grund des Symmetriegesetzes (1) schreiben:

$$s(\alpha'', \beta') = s(\alpha'', \beta''),$$

und sie liefert dann mit der ersten zusammen:

$$s(\alpha', \beta') = s(\alpha'', \beta'').$$

---

1) R. F. S. 69.

In Worten: *Es seien α, β irgend zwei gegebene geschlossene Kurven; sind dann α', β' irgend zwei geschlossene, sich in einzelnen Punkten überkreuzende Streckenzüge, die in der Nähe von α bzw. β verlaufen, so hat die Charakteristik $s(\alpha', \beta')$ immer den gleichen Wert s, man mag im übrigen diese Streckenzüge wählen, wie man will.* Wir bezeichnen s darum auch mit $s(\alpha, \beta)$, nennen diese Zahl die Charakteristik von α in bezug auf β und können sie unbedenklich als die Gesamtzahl der positiven Überschreitungen von α über β ansprechen. Auch für beliebige Kurven gilt die Symmetriegleichung (1). Aus ihr folgt noch

$$s(\alpha, \alpha) = 0.$$

Schneiden sich α und β nicht, so ist stets $s(\alpha, \beta) = 0$. — Damit haben wir den Charakteristenbegriff für beliebige geschlossene Kurven festgelegt.

Ist β' ein geschlossener Streckenzug, der in der Nähe der beliebigen geschlossenen Kurve β verläuft, so können wir zu β' wie oben eine Integralfunktion F konstruieren, die für jede geschlossene Kurve α die Gleichung

$$F(\alpha) = s(\alpha, \beta')$$

oder, da $s(\alpha, \beta') = s(\alpha, \beta)$ ist, die Gleichung

$$F(\alpha) = s(\alpha, \beta)$$

erfüllt. Aus dieser wichtigen Tatsache, daß die Charakteristik, in ihrer Abhängigkeit vom ersten Wege α betrachtet, mit einer Integralfunktion identisch ist, schließen wir sogleich:

I. Ein geschlossener Weg, welcher homolog 0 ist, hat mit Bezug auf jede geschlossene Kurve die Charakteristik 0.

II. Der Wert der Charakteristik $s(\alpha, \beta)$ ändert sich nicht, wenn man α durch einen zu α homologen Weg ersetzt.

III. Aus $\alpha \sim \alpha' \pm \alpha''$ folgt

$$s(\alpha, \beta) = s(\alpha', \beta) \pm s(\alpha'', \beta).$$

Entsprechendes ergibt sich für s in seiner Abhängigkeit vom zweiten Wege β aus dem Symmetriegesetz (1).

Ist $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_h$ eine Basis der geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$, h also der Zusammenhangsgrad unserer Fläche, und

$$\alpha \sim m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + \cdots + m_h\gamma_h,$$
$$\beta \sim n_1\gamma_1 + n_2\gamma_2 + \cdots + n_h\gamma_h$$

(die m und n sind ganze Zahlen), so wird

$$s(\alpha, \beta) = \sum_{i,j=1}^{h} s_{ij} m_i n_j;$$

darin ist der Koeffizient

$$s_{ij} = s(\gamma_i, \gamma_j).$$

Die schiefsymmetrische Bilinearform

$$S = \sum_{i,j=1}^{h} s_{ij} x_i y_j \qquad (s_{ji} = -s_{ij})$$

der beiden Variablenreihen x_i, y_i heißt **Charakteristikenform.** Sie hängt von der Wahl der Wegebasis γ_i ab und erfährt, wenn diese durch eine andere ersetzt wird, eine ganzzahlige unimodulare lineare Transformation. *Unabhängig von der Wahl der Basis ist demnach die Determinante*

$$d = |s_{ij}|_{\substack{i=1,2,\ldots,h \\ j=1,2,\ldots,h}}$$

der Charakteristikenform. Es ist für die Analysis situs der geschlossenen zweiseitigen Flächen wie auch für die Funktionentheorie auf einer Riemannschen Fläche von entscheidender Bedeutung, daß *die Determinante der Charakteristikenform* $\neq 0$ *ist. Wir werden sogar zeigen, daß sie den Wert* 1 *besitzt.* Nur bei gerader Variablenzahl kann die Determinante einer schiefsymmetrischen Form $\neq 0$ (und zwar positiv) sein. Setzen wir demnach $h = 2p$, so ist p, das Geschlecht der Fläche $\mathfrak{F}$, eine ganze, nichtnegative Zahl.

Die Behauptung $d \neq 0$ ist offenbar der Aussage äquivalent, daß *ein Weg α, der mit Bezug auf jeden andern die Charakteristik* 0 *besitzt, selber notwendig* ~ 0 *ist,* d. i. der Umkehrung von I. Daß aber $d = 1$ ist, besagt: *Es gibt stets eine* (im Sinne der Homologie eindeutig bestimmte) *geschlossene Kurve, die mit Bezug auf die Basiskurven γ_1, $\gamma_2, \ldots, \gamma_h$ beliebig vorgegebene ganze Zahlen zu Charakteristiken hat.*

Um eine möglichst einfache Basis der geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$ zu ermitteln, muß man die Charakteristikenform durch unimodulare ganzzahlig-lineare Transformation in eine Normalform überführen. Wir kommen hier auf eine algebraisch-zahlentheoretische Fragestellung, die im Zusammenhang mit der Elementarteiler-Theorie, wie bekannt, ihre allgemeine Erledigung gefunden hat. Insbesondere ergibt sich in dieser Theorie (Frobenius), daß eine jede schiefsymmetrische Bilinearform von zweimal h Variablen mit ganzzahligen Koeffizienten durch unimodulare Transformation sich in eine Form der folgenden Art verwandeln läßt:

$$e_1(x_1 y_2 - x_2 y_1) + e_2(x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + e_p(x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}).$$

Die $e_1, e_2, \ldots, e_p$ sind ganze positive Zahlen und $2p \leqq h$. Die Determinante der Form wird 0, wenn $2p$ kleiner als die Variablenzahl h ist, im Falle $2p = h$ ist jedoch diese Determinante

$$= (e_1 e_2 \cdots e_p)^2.$$

Sie kann nur dann den Wert 1 bekommen, wenn die sämtlichen $e_i = 1$ sind ($i = 1, 2, \ldots, p$). Ist es wahr, daß d, die Determinante der Charakteristikenform, den Wert 1 hat, so muß es demnach eine Basis der geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$ geben, für welche die Charakteristikenform die einfache Gestalt besitzt:

$$(x_1 y_2 - x_2 y_1) + (x_3 y_4 - x_4 y_3) + \cdots + (x_{2p-1} y_{2p} - x_{2p} y_{2p-1}).$$

Umgekehrt erbringt man nach Riemann durch direkte Konstruktion einer solchen **„kanonischen Basis"** (S. 74—77) *den Nachweis der Gleichung* $d = 1$. Die Herstellung der kanonischen Zerschneidung betrachten wir also nicht als Selbstzweck, sondern lediglich als Mittel zum Beweis des für jede Wegebasis gültigen Satzes, daß die Determinante der Charakteristikenform $\neq 0$, genauer $= 1$ ist.

Es ist bisher noch nicht sichergestellt, daß die Charakteristik zweier Kurven auf $\mathfrak{F}$ unabhängig ist von der zugrunde gelegten Triangulation der Fläche. Um dies nachzuholen, kommt es offenbar darauf an, folgendes zu beweisen:

In einer mit positivem Drehungssinn versehenen Ebene I sei ein Gebiet $\mathfrak{G}$, etwa das Innere eines Kreises, gegeben, das umkehrbar-eindeutig und gebietsstetig auf ein Gebiet $\mathfrak{G}'$ der Ebene II abgebildet ist. Dadurch ist auch in II ein positiver Drehungssinn festgelegt (§ 10). In $\mathfrak{G}$ seien zwei geradlinige Strecken $\sigma = ab$, $\tau = cd$ gegeben und τ überkreuze σ von rechts nach links. In der Bildebene II erscheinen diese Strecken als zwei sich schneidende Kurven $\sigma' = a'b'$, $\tau' = c'd'$. Ist dann σ^* ein hinreichend nahe bei σ' verlaufender Streckenzug, der a' mit b' verbindet, τ^* ein hinreichend nahe an τ' entlang von c' nach d' führender Streckenzug, so ist die (wie bei der Definition der Charakteristik berechnete) Gesamtzahl der Überschreitungen von τ^* über σ^* gleich 1.

Ich gehe in der Ebene I von d aus längs einer in $\mathfrak{G}$ liegenden, σ nicht treffenden Kurve $\bar{\tau}$ nach c zurück. Die Differenz der Ordnungen von a und b in bezug auf die geschlossene Kurve $\gamma = \tau + \bar{\tau}$ ist dann

$$\underset{\gamma}{\operatorname{ord}}(a) - \underset{\gamma}{\operatorname{ord}}(b) = 1.$$

Gemäß dem Hauptsatz von § 10 bleibt dies im Bilde bestehen:

$$\underset{\gamma'}{\operatorname{ord}}(a') - \underset{\gamma'}{\operatorname{ord}}(b') = 1$$

und bleibt natürlich auch dann noch bestehen, wenn ich jetzt in der Ebene II das Stück τ' der Bildkurve $\gamma' = \tau' + \overline{\tau}'$ von γ durch einen hinreichend nahe bei τ' verlaufenden, von c' nach d' führenden Streckenzug τ^* ersetze (γ' also durch $\gamma^* = \tau^* + \overline{\tau}'$). Bedeutet für einen variablen Punkt p' der II. Ebene φ den Winkel, welchen die Strahlen $a'p'$ und $b'p'$ miteinander bilden, so ist φ in der längs eines einfachen, von a' nach b' führenden Streckenzuges σ^* aufgeschnittenen Ebene eine eindeutige Ortsfunktion. Am Schnitt selbst aber hat φ auf dem rechten Ufer einen um 2π höheren Wert als auf dem linken. Führe ich den Schnitt σ^* in solcher Nähe von σ', daß σ^* die Kurve $\overline{\tau}'$ nicht trifft, so muß, weil φ (wie wir eben konstatierten) bei stetiger Änderung längs der geschlossenen Kurve $\gamma^* = \tau^* + \overline{\tau}'$ den Zuwachs 2π erfährt — dieser Zuwachs ist nämlich

$$= 2\pi\{\operatorname*{ord}_{\gamma^*}(a') - \operatorname*{ord}_{\gamma^*}(b')\}—,$$

τ^* den Schnitt σ^* einmal öfter von rechts nach links überschreiten als in umgekehrter Richtung. Dies war unsere Behauptung.

Als Beleg dafür, daß die kanonische Basis in dem zweiten (funktionentheoretischen) Teil meines Buches stets durch eine beliebige Wegebasis ersetzt werden kann und dadurch das Wesentliche besser herausgehoben wird, komme ich noch einmal auf die Seite 98—99 geschilderte *Konstruktion der Differentiale 1. Gattung* zurück. Wir bilden wie dort zu einer beliebigen geschlossenen Kurve β das Differential 1. Gattung dw_β. Zerlegen wir β in Bögen, deren jeder innerhalb eines Stückes K der Riemannschen Fläche $\mathfrak{F}$ liegt, das eine konforme Abbildung auf das Innere eines Kreises der komplexen Ebene gestattet, so ändert sich dw_β gewiß nicht, wenn wir jeden dieser Teilbögen durch einen anderen, dieselben Endpunkte verbindenden und innerhalb des betr. Stückes K verlaufenden Kurvenbogen ersetzen. Insbesondere kann an Stelle von β, wenn $\mathfrak{F}$ trianguliert ist, auf solche Weise ein nahe bei β verlaufender Streckenzug β^* treten. Statt der a. a. O. aufgestellten Behauptung, daß für einen geschlossenen Streckenzug α^*, der β^* an einer einzigen Stelle von rechts nach links überkreuzt,

$$\Re\int_{\alpha^*} dw_\beta = \Re\int_{\alpha^*} dw_{\beta^*} = 1$$

ist, können wir mit dem gleichen Recht die allgemeinere aussprechen, daß für einen beliebigen geschlossenen Streckenzug α^*

$$\Re\int_{\alpha^*} dw_\beta = \Re\int_{\alpha^*} dw_{\beta^*} = s(\alpha^*, \beta^*) = s(\alpha^*, \beta)$$

ist. War α^* ein in der Nähe der beliebigen geschlossenen Kurve α verlaufender Streckenzug, so ergibt sich schließlich

$$\Re\int_{\alpha} dw_\beta = \Re\int_{\alpha^*} dw_\beta = s(\alpha^*, \beta) = s(\alpha, \beta).$$

Unsere Begründung des Charakteristikenbegriffs stützte sich vor allem auf den Umstand, daß die Charakteristik $s(\alpha, \beta)$ in ihrer Abhängigkeit vom ersten Wege α mit einer Integralfunktion identisch ist. Wir sehen jetzt, daß auf einer *Riemannschen* Fläche die analytisch einfachste und natürlichste Verwirklichung einer solchen Integralfunktion in der Bildung des Realteils eines gewissen Integrals 1. Gattung:

$$R_\beta = \Re\int dw_\beta$$

besteht.

Erfüllt ein Differential 1. Gattung dw für jeden geschlossenen Weg α die Gleichung

$$\Re\int_{\alpha} dw = 0,$$

so muß dw selber identisch $= 0$ *sein.* Denn unter der Voraussetzung ist

$$R(\mathfrak{p}) = \Re\int_{\mathfrak{p}_0}^{\mathfrak{p}} dw$$

bei Integration von einem festen Anfangspunkt $\mathfrak{p}_0$ nach dem variablen Endpunkt $\mathfrak{p}$ von dem Integrationswege $\mathfrak{p}_0\mathfrak{p}$ unabhängig, mithin eine eindeutige reguläre Potentialfunktion von $\mathfrak{p}$. Eine solche existiert aber außer der Konstanten nicht auf der geschlossenen Fläche.

Aus diesem Prinzip ergibt sich nun ohne weiteres (direkter, als es auf Seite 110 geschehen konnte):

I*. Ist $\beta \sim 0$, so ist dw_β identisch $= 0$.

II*. Ist $\alpha \sim \beta$, so gilt $dw_\alpha = dw_\beta$.

(Denn $dw_\alpha - dw_\beta$ ist ein Differential erster Gattung, das die Voraussetzung unseres Prinzips erfüllt.)

III*. Aus $\gamma \sim \alpha \pm \beta$ folgt $dw_\gamma = dw_\alpha \pm dw_\beta$.

An diese Tatsachen knüpft sich wie auf Seite 113/14 die Einführung der Integralcharaktere.

Daß sich ein jedes Differential 1. Gattung dw aus den Elementardifferentialen dw_α zusammensetzen läßt, ist eine Folge davon, daß die Charakteristikenform eine von 0 verschiedene Determinante besitzt. Es sei nämlich $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_{2p}$ eine Basis der geschlossenen Wege auf $\mathfrak{F}$ und

$$s(\gamma_i, \gamma_j) = s_{ij}, \qquad dw_{\gamma_i} = dw_i, \qquad \Re\int dw = c_i$$

gesetzt. Durch lineare Zusammensetzung der dw_i mittels reeller Konstanten a_i bilden wir

$$dw^* = \sum_{j=1}^{2p} a_j dw_j$$

und suchen dabei die a_i so zu bestimmen, daß

$$\Re \int_{\gamma_i} dw^* = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2$$

wird. Das ergibt die Gleichungen

$$\sum_{j=1}^{2p} s_{ij} a_j = c_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2p),$$

und diese gestatten wegen des Nicht-Verschwindens der Determinante ihrer Koeffizienten s_{ij} wirklich eine und nur eine Auflösung a_i. Nunmehr verschwindet die Integralfunktion

$$\Re \int (dw - dw^*)$$

für die $2p$ geschlossenen Wege γ_i, folglich für jede geschlossene Kurve, und das im vorletzten Absatz aufgestellte Prinzip gestattet, daraus zu schließen:

$$dw = dw^* = \sum^{2p} a_i dw_i.$$

Wir kehren zur Analysis situs zurück. Eine *reguläre* (unverzweigte, unbegrenzte) Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{F}$ kann man gemäß der in der Zahlkörpertheorie üblichen Terminologie als eine **Galoissche Überlagerungsfläche** (relativ zu $\mathfrak{F}$) bezeichnen und die Gruppe der Decktransformationen als die **Galoissche Gruppe** dieser Fläche (relativ zu $\mathfrak{F}$). Ist die Galoissche Gruppe insbesondere eine Abelsche, so wird $\overline{\mathfrak{F}}$ eine **Abelsche Überlagerungsfläche** über $\mathfrak{F}$ heißen. Hat man zwei Galoissche Überlagerungsflächen über $\mathfrak{F}$, $\overline{\mathfrak{F}}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$, von der Art, daß immer diejenigen Kurven $\bar{\alpha}$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$, welche die gleiche Spurkurve α auf $\mathfrak{F}$ besitzen wie eine beliebige geschlossene Kurve $\bar{\bar{\alpha}}$ auf $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$, gleichfalls geschlossen sind, so wollen wir sagen, $\overline{\mathfrak{F}}$ sei in $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ **enthalten.** Offenbar läßt sich $\overline{\overline{\mathfrak{F}}}$ in diesem Falle auch als Überlagerungsfläche über $\overline{\mathfrak{F}}$ auffassen. *Wie nun die universelle Überlagerungsfläche* $\tilde{\mathfrak{F}}$ *die umfassendste aller unverzweigten, unbegrenzten Überlagerungsflächen überhaupt ist* (sofern nämlich jede solche Fläche in $\tilde{\mathfrak{F}}$ „enthalten" ist), *so stellt* $\hat{\mathfrak{F}}$, *die Überlagerungsfläche der Integralfunktionen, unter allen unverzweigten, unbe-*

grenzten, relativ Abelschen Flächen die umfassendste vor, welche alle andern Flächen dieser Art enthält. Darin kommt die eigentliche Bedeutung von $\hat{\mathfrak{F}}$ zum Ausdruck. Das Verhältnis von $\hat{\mathfrak{F}}$ zu $\mathfrak{F}$ ist völlig demjenigen analog, das in der Zahlkörpertheorie zwischen dem Hilbertschen *Klassenkörper* $\hat{K}$ und seinem Grundkörper K besteht; denn $\hat{K}$ ist ebenfalls derjenige unverzweigte, relativ-Abelsche Körper über K, der alle Abelschen unverzweigten Körper umfaßt. Um die eben ausgesprochene Grundeigenschaft von $\hat{\mathfrak{F}}$ zu beweisen, stellen wir folgende Überlegungen an.

Sei $\overline{\mathfrak{F}}$ eine Galoissche Überlagerungsfläche über der geschlossenen Grundfläche $\mathfrak{F}$, $\overline{\alpha}$ ein Weg auf $\overline{\mathfrak{F}}$, der von einem Punkte $\overline{\mathfrak{p}}$ zu dem darüber gelegenen Punkte $\overline{\mathfrak{p}}S$ führt (S ist das Zeichen für eine Decktransformation), und α die (geschlossene) Spurkurve von $\overline{\alpha}$ auf $\mathfrak{F}$. Will man zu irgendeinem andern Punkt $\overline{\mathfrak{q}}$ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ den darüber gelegenen $\overline{\mathfrak{q}}S$ ermitteln, so hat man $\overline{\mathfrak{p}}$ mit $\overline{\mathfrak{q}}$ durch einen Weg $\overline{\beta}$ zu verbinden und diejenige von $\overline{\mathfrak{p}}S$ ausgehende Kurve $\overline{\beta}S$ zu konstruieren, welche sich mit $\overline{\beta}$ in Deckung befindet: sie endet in $\overline{\mathfrak{q}}S$. Wendet man dies erstens auf einen Punkt $\overline{\mathfrak{q}}$ von $\overline{\alpha}$ an, so erkennt man, daß derjenige von $\overline{\mathfrak{q}}$ ausgehende Weg auf $\overline{\mathfrak{F}}$, dessen Spur die einmal positiv durchlaufene Kurve α ist, zu $\overline{\mathfrak{q}}S$ führt. Wir wenden das Gesagte zweitens an auf einen über $\overline{\mathfrak{p}}$ gelegenen Punkt $\overline{\mathfrak{p}}^*$, der aus $\overline{\mathfrak{p}}$ durch die Decktransformation T entstehe und von $\overline{\mathfrak{p}}$ aus auf dem Wege $\overline{\beta}$ erreicht werde. Die Spurkurve β von $\overline{\beta}$ ist geschlossen. Wir erkennen dann, daß man von $\overline{\mathfrak{p}}$ aus zu $\overline{\mathfrak{p}}^*S = \overline{\mathfrak{p}}TS$ gelangt, indem man *zunächst* diejenige Kurve durchläuft, deren Spur α ist (d. i. $\overline{\alpha}$) und *darauf* von deren Endpunkt (d. i. $\overline{\mathfrak{p}}S$) aus den über β verlaufenden Weg (und nicht etwa erst β und dann α). Um von $\overline{\mathfrak{p}}^*$ zu $\overline{\mathfrak{p}}^*S$ zu gelangen, kann man den Weg durchmessen, dessen Spurbahn durch $-\beta+\alpha+\beta$ bezeichnet wird; der von $\overline{\mathfrak{p}}^*$ aus durchlaufene Weg α führt im allgemeinen *nicht* zu $\mathfrak{p}^*S$.

Wenn aber $\overline{\mathfrak{F}}$ insbesondere eine Abelsche Fläche über $\mathfrak{F}$ ist, so gilt

$$\overline{\mathfrak{p}}TS = \overline{\mathfrak{p}}ST;$$

es ist demnach gleichgültig, ob man auf $\overline{\mathfrak{F}}$ zunächst α und dann β oder umgekehrt zuerst β und dann α durchläuft: wenn man nur beide Mal von demselben Anfangspunkt ($\overline{\mathfrak{p}}$) ausgeht, wird man auf beide Weisen zu demselben Endpunkt gelangen. Die von $\overline{\mathfrak{p}}^*$ ausgehende, sich über $-\beta+\alpha+\beta$ hinziehende Kurve auf $\overline{\mathfrak{F}}$ hat demgemäß denselben Endpunkt, nämlich $\overline{\mathfrak{p}}^*S$ wie die von $\overline{\mathfrak{p}}^*$ ausgehende Kurve $-\beta+\beta+\alpha$, d. h. wie der in $\overline{\mathfrak{p}}^*$ beginnende, über α sich hinziehende Weg. Verfolgen wir demnach auf einer *Abelschen* Überlagerungsfläche einen auf

der Grundfläche gegebenen geschlossenen Weg α, indem wir an irgendeiner über einem Punkte $\mathfrak{p}$ von α gelegenen Stelle $\bar{\mathfrak{p}}$ beginnen, so führt derselbe immer zu dem Endpunkt $\bar{\mathfrak{p}}S$, der mittels einer bestimmten, *von* $\bar{\mathfrak{p}}$ *unabhängigen* Decktransformation S aus $\bar{\mathfrak{p}}$ hervorgeht. Wir nennen S **die zu α gehörige Decktransformation.**

Auf $\mathfrak{F}$ bringen wir eine kanonische Zerschneidung Σ an, bestehend aus p Rückkehrschnittpaaren

$$\pi_1 + \pi_1', \quad \pi_2 + \pi_2', \quad \ldots, \quad \pi_p + \pi_p'$$

und p Streckenzügen σ_i, die von den Kreuzungspunkten der Rückkehrschnittpaare nach einem festen Punkt der Fläche laufen. Schneiden wir die Fläche $\mathfrak{F}$ längs Σ auf, so verwandelt sie sich in eine einfach zusammenhängende Fläche $\mathfrak{F}_*$. Aus diesem Grunde zerfällt die unverzweigte, unbegrenzte Überlagerungsfläche $\bar{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{F}$ in lauter einzelne Exemplare solcher aufgeschnittenen Flächen $\mathfrak{F}_*$, wenn wir $\bar{\mathfrak{F}}$ (durch die sämtlichen Blätter von $\bar{\mathfrak{F}}$ hindurch) längs Σ zerschneiden. Aus diesen einzelnen Exemplaren, die wir im präzisen Sinne als die **Blätter** von $\bar{\mathfrak{F}}$ bezeichnen, entsteht rückwärts die heile Fläche $\bar{\mathfrak{F}}$ dadurch, daß wir die Blätter in gewisser, für die Überlagerungsfläche $\bar{\mathfrak{F}}$ charakteristischer Weise längs ihrer Schnittränder aneinander heften. Man wird dabei, aus einem bestimmten Blatte $\mathfrak{B}$ kommend, bei Überschreitung eines bestimmten der Rückkehrschnitte π, π' oder „Zügel“ σ in bestimmtem Sinne (z. B. von rechts nach links) immer in das *gleiche* Blatt $\mathfrak{B}^*$ geraten, einerlei an welcher Stelle des betr. π, π' oder σ jene Überschreitung erfolgt.

Sei jetzt $\bar{\mathfrak{F}}$ *Galoissch* in bezug auf $\mathfrak{F}$, und $\mathfrak{p}_0$, $\mathfrak{p}_0^*$ zwei homolog (d. i. übereinander) gelegene Punkte in den zwei beliebigen Blättern $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{B}^*$ von $\bar{\mathfrak{F}}$. Es gibt eine einzige Decktransformation S, für die $\mathfrak{p}_0^* = \mathfrak{p}_0 S$ ist. Ist $\mathfrak{p}$ ein beliebiger Punkt des Blattes $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{p}^*$ der homolog gelegene im Blatte $\mathfrak{B}^*$, so, behaupte ich, ist dann auch $\mathfrak{p}^* = \mathfrak{p}\, S$. Ich brauche um dies zu erkennen, nur $\mathfrak{p}$ mit $\mathfrak{p}_0$ durch einen Weg innerhalb $\mathfrak{B}$ (der also Σ nirgendwo trifft) zu verbinden und $\mathfrak{p}^*$ mit $\mathfrak{p}_0^*$ durch den gleichen Weg innerhalb $\mathfrak{B}^*$. In Anbetracht dieser Tatsache wird das Blatt $\mathfrak{B}^*$ als dasjenige $\mathfrak{B}S$ anzusprechen sein, das durch die Transformation S aus $\mathfrak{B}$ hervorgeht.

Ist $\bar{\mathfrak{F}}$ endlich *Abelsch* in bezug auf $\mathfrak{F}$, so gehört zu jedem der $2p$ Rückkehrschnitte π_i, π_i' eine bestimmte Decktransformation S_i, S_i'. Da beispielsweise π_i' den Weg π_i einmal von rechts nach links überkreuzt, so wird man, aus einem Blatte $\mathfrak{B}$ kommend, bei Überschreitung des Weges π_i von rechts nach links notwendig in das Blatt $\mathfrak{B}S_i'$ geraten, das durch die Transformation S_i' aus $\mathfrak{B}$ hervorgeht. Läuft man

auf $\overline{\mathfrak{F}}$ um den Kreuzungspunkt des i^{ten} Rückkehrschnittpaares herum, so gelangt man der Reihe nach in die fünf Zwickel I bis V, die dort von den drei Linien π_i, π_i', σ_i gebildet werden (siehe die Figur). Nimmt man dabei auf $\overline{\mathfrak{F}}$ seinen Ausgang im Blatte $\mathfrak{B}$, so wird man sich dabei sukzessive in folgenden Blättern befinden:

Zwickel:	I	II	III	IV	V
Blatt:	$\mathfrak{B}$	$\mathfrak{B}S_i'$	$\mathfrak{B}S_i'S_i^{-1}$	$\mathfrak{B}S_i'S_i^{-1}S_i'^{-1}$ $= \mathfrak{B}S_i^{-1}$	$\mathfrak{B}$

Unter IV wird die Kommutativität ausgenutzt. Es zeigt sich also, daß über σ_i hinüber das Blatt $\mathfrak{B}$ mit sich selber zusammenhängt, daß mit andern Worten beim Aufbau der Überlagerungsfläche $\overline{\mathfrak{F}}$ die Schnittränder von σ_i in jedem Blatt für sich wieder aneinander zu heften sind und daß es folglich von vorn herein überflüssig war, längs der Zügel σ_i aufzuschneiden, und $\overline{\mathfrak{F}}$ bereits in lauter einzelne Blätter zerfällt, wenn wir die Zerschneidung nur längs der $2p$ Kurven π_i, π_i' vornehmen.

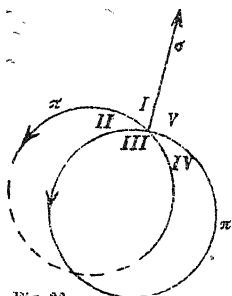



Fig. 28.

Ist jetzt γ irgendein geschlossener Streckenzug auf $\overline{\mathfrak{F}}$, der die Rückkehrschnitte an einzelnen Stellen, die keine Ecken sind, überkreuzt, und verfolgen wir diesen Weg auf $\overline{\mathfrak{F}}$, indem wir an einer Stelle $\mathfrak{p}$ des Blattes $\mathfrak{B}$ unsern Ausgang nehmen, so geraten wir bei jeder Überkreuzung der Rückkehrschnitte aus dem Blatt, wo wir uns zuletzt befanden, in ein anderes, das aus diesem durch eine der Transformationen $S_i^{\pm 1}$, $S_i'^{\pm 1}$ hervorgeht; und zwar kann diese Transformation aus folgender Tabelle abgelesen werden:

	Überschreitung von π_i	Überschreitung von π_i'
von rechts nach links	S_i'	S_i^{-1}
von links nach rechts	$S_i'^{-1}$	S_i

Wir enden also, wenn die Spurkurve γ auf $\overline{\mathfrak{F}}$ sich schließt, in einem Blatte $\mathfrak{B}T$, wobei das Symbol der Decktransformation T aus einer Zusammenstellung von lauter Faktoren $S_i^{\pm 1}$, $S_i'^{\pm 1}$ besteht. Benutzen wir die Kommutativität, so können wir schreiben

$$T = S_1^{m_1} S_1'^{m_1'} \ldots S_p^{m_p} S_p'^{m_p'},$$

und es wird dabei auf Grund der Tabelle

$$m_i = - s(\gamma, \pi_i'), \qquad m_i' = s(\gamma, \pi_i);$$

s ist das Zeichen für die Kroneckersche Charakteristik. Auf $\overline{\mathfrak{F}}$ führt

γ von $\bar{\mathfrak{p}}$ zum Punkt $\bar{\mathfrak{p}}T$. Dies Resultat überträgt sich von einem Streckenzug sogleich auf eine beliebige geschlossene Kurve γ. Ist

$$\gamma \sim n_1\pi_1 + n_1'\pi_1' + \ldots + n_p\pi_p + n_p'\pi_p',$$

so wird aber

$$s(\gamma, \pi_i') = -n_i, \quad s(\gamma, \pi_i) = n_i';$$

es findet sich demnach

$$m_i = n_i, \quad m_i' = n_i',$$

und dieses ist unser Resultat: *Zu einem geschlossenen Wege, der*

$$\sim (n_1\pi_1 + n_1'\pi_1') + (n_2\pi_2 + n_2'\pi_2') + \cdots + (n_p\pi_p + n_p'\pi_p')$$

ist, gehört die Decktransformation

$$S_1^{n_1} S_1'^{n_1'} S_2^{n_2} S_2'^{n_2'} \ldots S_p^{n_p} S_p'^{n_p'}.$$

Insbesondere: zu einem Wege, der ~ 0 ist, gehört als Decktransformation die Identität; d. h. *eine Kurve auf der Abelschen, unverzweigten unbegrenzten Überlagerungsfläche* $\bar{\mathfrak{F}}$, *deren Spur ein geschlossener, der Null homologer Weg auf der Grundfläche* $\mathfrak{F}$ *ist, muß selber geschlossen sein.* Damit ist unsere Behauptung bewiesen.

Konvergenzkreis 1.
Koordinatenverhältnis 21.
Kreis 80.
kritischer Punkt 4.
Kurve 18.
—, analytische 39.
— ohne Ende 145.
—, stetig differentiierbare 39.
Kurvenfunktion 68.
—, lineare 68.

L.

(ein Punkt) liegt über (einem andern) 47.
Limes 100.
linear abhängige Integralfunktionen 68.
lineare Kurvenfunktion 68.
links 76.
Lobatschefskysche Geometrie 152.
Loch 93.

M.

Mannigfaltigkeit, zweidimensionale 17.
Mittelpunkt eines Funktionselements 1.
Möbiussches Band 26.
Modul Riemannscher Flächen 41.
multiplikatives Differential 129.
multiplikative Funktion 117.
Multiplikator einer Transformation 159.
Multiplum eines Divisors 120.

N.

Nicht-Euklidische Bewegung 152.
— Ebene 152.
— Entfernung 154.
Normaldarstellung eines Funktionselements 8.
Normalform einer Riemannschen Fläche 151.
Normalpolygon 155.
Nullstelle eines Differentials 55.
— einer Funktion 38.

O.

offene Fläche 24.
— s Polyeder 52.
Ordnung der Nullstelle eines Differentials 55.
— — — einer Funktion 38.
— des Pols eines Differentials 55.
— — — einer Funktion 38.
— eines Differentials in einem Punkte 55.
— einer Funktion in einem Punkte 38.
— einer Gruppe 161.
Ordnung eines Punktes in bezug auf eine Kurve 56.
— (Gesamtordnung) eines Divisors 120.
—, Verzweigungs- 9.
Ortsuniformisierende 36.

P.

parabolische Transformation 160.
Perioden einer Integralfunktion 77.
Poincarésche Θ-Reihen 158.
Pol eines Differentials 55.
— einer Funktion 38.
Polyeder 52.
—, geschlossenes und offenes 52.
Polygon 44.
(Normal-)Polygon 155.
Potentialfunktion 38.
projektive Ebene 25.
Prymsches Differential 129.
Punkt einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit 17.
Punktgitter 28, 72, 127.
Punkt, innerer 18.
—, isolierter 18.
—, kritischer 4.

Q.

Querschnitt 52.

R.

Randkante eines offenen Polyeders 52.
rechts 76.
regulär-analytisches Differential 55.
— — e Funktion auf einer Riemannschen Fläche 36.
reguläres Funktionselement 8.
— e Überlagerungsfläche 50.
Residuum 56.
Riemannsche Fläche 36.
Riemann-Rochscher Satz 122.
— —, verallgemeinerter 130.
Rückkehrschnittpaar 75.

S.

Schema einer Fläche 29.
schlichtartige Fläche 45.
singuläre Stelle einer Funktion 38.
Sprung einer Integralfunktion 77.
Spurpunkt 47.
stetige Abbildung 19.
— er Drehungssinn 61.
— e Funktion 18.
stetig differentiierbare Funktion 39.
— — Kurve 39.

Stern 22.
Strecke, gerichtete 44.
Streckenzug 44.
—, einfacher 44.
—, geschlossener 44.
Symbol eines Differentials 120, 129.
— einer Funktion 119.
System äquivalenter Punkte 27, 151.

T.

Teildreieck 31.
Θ-Reihen 158.
Topologie 20.
Torus 27.
Transformation, birationale 139.
—, elliptische 160.
—, hyperbolische 159.
—, infinitesimale 159.
—, parabolische 160.
Triangulation 22.
t-Umgebung 10.

U.

Überlagerungsfläche 47.
— der Integralfunktionen 74.
einblättrige 47.
reguläre 50.
unbegrenzte 47.
universelle 50.
unverzweigte 47.
(ein Streckenzug) überschneidet sich nicht 44.
Ufer 45.
—, getrennte 65.
Umgebung, analytische 9.
— auf einer Fläche 17.
Umkehrproblem 128.
unbegrenzte Überlagerungsfläche 47.
Uniformisierende 141.
(Grenzkreis-)Uniformisierende 152.
(Orts-)Uniformisierende 36.
(zu 𝔈 gehörige) Uniformisierende 81.
Uniformisierungsprinzip 148.
universelle Überlagerungsfläche 50.
unmittelbare analytische Fortsetzung 2.
Unterteilung 31.
unverzweigtes Funktionselement 9.
— e Überlagerungsfläche 47.

V.

Variable, uniformisierende 141.
Verdichtungsstelle 18.
Verschlußring 93.
verzweigtes Funktionselement 9.
Verzweigungsordnung 9.
Verzweigungspunkt 32.
Verzweigungszahl 135

W.

Wert einer analytischen Funktion 5.
— — Funktion auf einer Fläche 18.
— — Kurvenfunktion 68.
wesentlich singuläre Stelle 38.
Winkel 39.

X. Y.

(vacant.)

Z.

Zerlegung in Elementardreiecke 23.
— eines Gebiets durch eine Menge 44.
Zerschneidung, kanonische 76.
(analytisch) zusammenhängende Reihe von Funktionselementen 11.
(einfach) zusammenhängende Fläche 47.
Zusammenhangsgrad 69.
zweidimensionale Mannigfaltigkeit 17.
zweiseitige Fläche 61.
Zykel von Ecken 156.